

KONTINUITÄTSSÄTZE IN BANACHRÄUMEN

Volker Aurich

1977

KONTINUITÄTSSÄTZE IN BANACHRÄUMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Volker Aurich
aus Schwäbisch Hall

eingereicht am: 28. Januar 1977



1. Berichterstatter : Professor Dr. Karl Stein
 2. Berichterstatter : Priv.-Doz. Dr. Martin Schottenloher
- Tag der mündlichen Prüfung : 29. Juli 1977

FÜR M.

Multa non multum.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	Problemstellung und historische Entwicklung	1
	Zusammenfassung	5
Bezeichnungen		11
Kapitel 0	Grundlegende Definitionen und Sätze	
	a) Holomorphe Abbildungen	12
	b) Gebiete über lokalkonvexen Räumen	16
	c) Analytische Mengen in Banachräumen	20
	d) Einfache Fortsetzungssätze	35
Kapitel 1	Charakterisierung der Holomorphie und Meromorphie von Abbildungen durch Eigenschaften ihrer Graphen	41
Kapitel 2	Kontinuitätssätze für pseudokonvexe Gebiete	56
Kapitel 3	Kontinuitätssätze für holomorphe Abbildungen	89
Kapitel 4	Kontinuitätssätze für meromorphe Funktionen	95
Kapitel 5	Das Leviproblem für meromorphe Funktionen	105
Anhang	Gebiete über $c_0(I)$ mit überabzählbarer Indexmenge I	110
Literaturverzeichnis		118

Einleitung

Problemstellung und historische Entwicklung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen tritt ein in der Theorie einer Veränderlichen nicht bekanntes Phänomen auf:

Es gibt Gebiete $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $n > 1$, derart daß jede holomorphe Funktion auf Ω_1 eine holomorphe Fortsetzung nach Ω_2 besitzt.

Die bekannteste Aussage dieser Art ist wohl der sogenannte HARTOGSSche Kontinuitätssatz; er ist eine einfache Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel und dem Identitätssatz.

HARTOGSScher Kontinuitätssatz:

r und s seien reelle Zahlen, $0 < r < 1$, $0 < s < 1$,

$P := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ und

$H := P - \{(z, w) \in P : |z| < r, |w| > s\}$. Dann kann jede

auf H holomorphe Funktion holomorph nach P fortgesetzt werden.

Dieses Fortsetzungsphänomen gibt Anlaß, den Begriff der Holomorphiehülle Ω_0 eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ zu prägen, das ist das größte, Ω umfassende unverzweigte Gebiet über $\mathbb{C}^n$, auf das jede auf Ω holomorphe Funktion holomorph fortgesetzt werden kann. Analog wird die Meromorphiehülle Ω_m definiert. Jedes Gebiet besitzt eine Holomorphie- und eine Meromorphiehülle; sie sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In der Theorie einer Veränderlichen spielen beide Begriffe keine Rolle, da stets $\Omega = \Omega_0 = \Omega_m$ gilt, wie eine einfache Überlegung zeigt.

Meist kann man die Holomorphie- und die Meromorphiehülle nicht konkret beschreiben; man versucht deshalb, wenigstens Teilmengen davon explizit anzugeben. Solche Aussagen heißen Kontinuitätssätze.

Die ersten Sätze dieser Art waren Fortsetzungssätze für holomorphe Funktionen, die aus dem RIEMANNschen Hebbarkeitssatz einer Veränderlichen folgen. Sie wurden 1905 von KISTLER in seiner Dissertation [32] formuliert, waren teilweise aber wohl schon K.WEIERSTRASS bekannt (vgl. [41, OSGOOD, p.164]); 1911 dehnte sie F.HARTOGS auf meromorphe Funktionen aus ([26]). Der oben zitierte HARTOGSsche Kontinuitätssatz sowie einige Verallgemeinerungen und Folgerungen finden sich 1906 in [25, HARTOGS]; insbesondere ist dort auch ein Spezialfall des sogenannten Kugelsatzes bewiesen, der später von W.F.OSGOOD und A.B.BROWN in der folgenden allgemeinen Form gezeigt wurde ([40,41,15]):

Ist Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, mit zusammenhängendem Rand, so besitzt jede auf dem Rand holomorphe Funktion eine holomorphe Fortsetzung nach Ω . Eine holomorphe Funktion in mehr als einer Variablen besitzt also keine isolierten Singularitäten; dies war schon A.HURWITZ bekannt (siehe [61], p.104).

Diese Aussagen wurden seither sowohl auf allgemeinere geometrische Situationen als auch auf andere analytische Objekte wie holomorphe und meromorphe Abbildungen, analytische Mengen oder Garben ausgedehnt (wegen einer Zusammenstellung der einschlägigen Literatur siehe [6,7,40,56]).

Im Falle holomorpher und meromorpher Funktionen hat es sich als günstig erwiesen, zunächst Kontinuitätssätze der fol-

genden Gestalt zu beweisen (die verwendeten Begriffe werden im weiteren Verlauf erläutert werden).

(KS) $\mathfrak{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{F}$ seien berandete analytische Flächen im $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, $\mathcal{R}_i$ bzw. $\mathcal{R}$ seien ihre Ränder. Die $\mathfrak{F}_i$ mögen gegen $\mathfrak{F}$ konvergieren und die $\mathcal{R}_i$ gegen $\mathcal{R}$. Dann kann jede auf $\mathcal{R} \cup \bigcup \{ \mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N} \}$ holomorphe bzw. meromorphe Funktion von $\mathcal{R}$ aus holomorph bzw. meromorph nach $\mathfrak{F}$ fortgesetzt werden.

Wie den eingangs zitierten HARTOGSSchen Kontinuitätssatz beweist man die Aussage (KS) für holomorphe Funktionen, wenn $\mathfrak{F}_i = \overline{B} \times \{w_i\}$ und $\mathfrak{F} = \overline{B} \times \{w\}$, wobei B ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gegen w konvergente Folge in $\mathbb{C}^{n-1}$ ist. Um die Beschreibung der geometrischen Situation gegenüber biholomorphen Abbildungen invariant zu gestalten, muß man allgemeinere Flächen als parallele Ebenenstücke zulassen. Einen solchen Satz veröffentlichte H.BEHNKE 1936 in [4] (siehe auch [6]); darin sind die $\mathfrak{F}_i$ relativ kompakte Gebiete in analytischen Mengen. Der Beweis beruht auf der Holomorphiekonvexität des Existenzgebietes einer holomorphen Funktion und auf dem schwachen Maximumprinzip für holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen. Er ist deshalb nicht auf meromorphe Funktionen übertragbar.

Tatsächlich erwiesen sich die entsprechenden Sätze für meromorphe Funktionen als viel schwieriger. 1910 übertrug E.LEVI die HARTOGSSchen Resultate mit Einschränkungen auf meromorphe Funktionen zweier Veränderlichen ([36]). Die Einschränkungen besagen im wesentlichen, daß in (KS) die $\mathfrak{F}_i$ Kreisscheiben $\Delta \times \{w_i\}$ sein müssen; dabei ist $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konver-

gente Folge in $\mathcal{C}$. Im Falle $w_1 \in \mathcal{C}^m$, $m > 1$, mußte zusätzlich vorausgesetzt werden, daß die Funktion nicht auf dem gesamten Rand der Grenzfläche singulär ist. Auf beide Voraussetzungen konnte H.KNESER 1932 verzichten ([33,34]).

Es dauerte längere Zeit, bis ein invarianter Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen gefunden wurde. Dies gelang 1947 W.ROTHSTEIN und 1950 H.BEHNKE und K.STEIN ([46,6,6a]) Die Beweismethoden sind verschieden, beruhen aber beide auf dem KNESERSchen Satz. Beide Beweise sind deutlich komplizierter als BEHNKES Beweis des entsprechenden Satzes für holomorphe Funktionen. Aus dem invarianten Kontinuitätssatz lassen sich weitere Fortsetzungssätze für meromorphe Funktionen herleiten, deren ursprüngliche Version für holomorphe Funktionen von F.SEVERI stammt ([6,54,55]).

Schließlich gibt es noch einen sogenannten stetigen Kontinuitätssatz, bei dem die Holomorphie bzw. Meromorphie der betrachteten Funktion nicht auf dem ganzen Rand, sondern nur in einem Punkt der Grenzfläche gefordert wird (siehe [56,58]).

Ein Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war die Frage, ob die oben erwähnten Kontinuitätssätze auch in Banachräumen gelten. Es waren bereits mindestens drei Ansätze vorhanden. 1956 bewies H.SOEDER die Aussage (KS) für holomorphe Funktionen auf dem Produkt $E_1 \times E_2$ zweier Banachräume im Falle, daß B eine Kugel in E_1 , $\mathcal{F}_1 = \overline{B} \times \{w_1\}$, $\mathcal{F} = \overline{B} \times \{w\}$ und $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gegen w konvergente Folge in E_2 ist ([57]). Bei H.BREMERMANN dürfen die $\mathcal{F}_1$ analytische Bilder von Kreisscheiben sein ([14]). H.ALEXANDER schließlich zeigte 1968 den HARTOGSSchen Kugelsatz für holomorphe Funktionen auf beschränkten Gebieten in Banachräumen ([1]).

Zusammenfassung

Will man die obige Aussage (KS) für unendlichdimensionale und nicht notwendig ebene und zueinander parallele Flächen beweisen, so zeigt sich schon im holomorphen Fall, daß die endlichdimensionalen Beweismethoden nicht mehr funktionieren. Der Versuch, geeignete Änderungen zu finden, führte schließlich nicht nur zu einem Beweis unendlichdimensionaler Kontinuitätssätze, sondern auch zu einem für holomorphe und meromorphe Funktionen gemeinsamen Beweis des oben erwähnten invarianten Kontinuitätssatzes sowie zu einigen Vereinfachungen bei dessen Übertragung auf Abbildungen. Wir wollen dies erläutern.

Der BEHNKEsche Beweis des Kontinuitätssatzes für holomorphe Funktionen funktioniert nicht mehr, sobald die $\mathfrak{F}_i$ Gebiete in unendlichdimensionalen analytischen Mengen sind; und zwar aus zwei Gründen: erstens sind dann die Ränder der $\mathfrak{F}_i$ nicht kompakt, so daß die Holomorphiekonvexität der Existenzgebiete holomorpher Funktionen nicht ausgenützt werden kann, und zweitens gibt es Beispiele analytischer Mengen in Banachräumen, auf denen das Maximumprinzip nicht gilt ([20, DOUADY]).

Als Ersatz für die Holomorphiekonvexität bietet sich die schwächere Eigenschaft der $\mathcal{P}$ -Konvexität d.h. der Konvexität bezüglich der plurisubharmonischen Funktionen an (siehe [35, LELONG]); sie ist äquivalent zur Pseudokonvexität. Man hat dann lediglich zu untersuchen, auf welchen Mengen ein schwaches Maximumprinzip für plurisubharmonische Funk-

tionen gilt, um in Analogie zu BEHNKEs Beweis schließen zu können. Im Endlichdimensionalen findet sich dies ansatzweise schon bei BREMERMAN in [12].

BEHNKE gab nicht unmittelbar die Fortsetzung der betrachteten holomorphen Funktion f an, sondern zeigte, daß die Grenzfläche $\mathfrak{F}$ in deren Existenzgebiet enthalten ist. Weil das Existenzgebiet nicht schlicht zu sein braucht, ist diese Enthaltensrelation nicht rein mengentheoretisch zu verstehen; sie bedeutet vielmehr, daß es einen stetigen Schnitt des Existenzgebietes über $\mathfrak{F}$ gibt, der den von f induzierten Schnitt fortsetzt. BEHNKE bewies also im Grunde genommen einen Kontinuitätssatz für stetige Schnitte holomorphkonvexer Gebiete über ϕ^n . Ersetzt man in dieser Formulierung holomorphkonvex durch pseudokonvex, so braucht man auf Holomorphie in keiner Weise mehr Bezug zu nehmen. Wir beweisen daher im zweiten Kapitel Kontinuitätssätze für stetige Schnitte pseudokonvexer Gebiete über Banachräumen.

Ein Problem haben wir bisher nicht berührt, in welchem Sinne nämlich in (KS) die Konvergenz der $\mathfrak{F}_i$ zu verstehen ist. In der oben zitierten Literatur finden sich dazu oft keine sehr präzisen Angaben. Wir haben uns deshalb hauptsächlich daran orientiert, was in unserem Beweis benötigt wird, und führen einen etwas technischen Konvergenzbegriff ein, der jedoch in vielen Fällen leicht zu verifizieren ist.

Um nun die entsprechenden Kontinuitätssätze für holomorphe und meromorphe Funktionen zu erhalten, hat man lediglich nachzuweisen, daß deren Existenzgebiete pseudokonvex sind. Für die Existenzgebiete holomorpher Funktionen ist dies schon

länger bekannt, auch im Unendlichdimensionalen ([13, BREMMERMANN]). Es folgt aus einer einfachen Version des HARTOGSschen Kontinuitätssatzes. Die Pseudokonvexität der Existenzgebiete meromorpher Funktionen resultiert entsprechend aus einem Spezialfall des KNESERSchen Satzes, den wir deshalb im vierten Kapitel auf das Unendlichdimensionale übertragen. Um die Kontinuitätssätze auf holomorphe Abbildungen auszudehnen, hat man ebenfalls nur zu verifizieren, daß für diese Abbildungen die erwähnte Version des HARTOGSschen Kontinuitätssatzes gilt. Dies ist u.a. dann möglich, wenn der Bildraum ein folgenvollständiger lokal-konvexer Vektorraum oder ein endlichdimensionaler Steinscher komplexer Raum ist.

Weil zum Beweis der Kontinuitätssätze lediglich die Pseudokonvexität der Existenzgebiete holomorpher und meromorpher Funktionen ausgenützt wird, ist es denkbar, daß es Kontinuitätssätze für holomorphe und meromorphe Funktionen gibt, die nicht für stetige Schnitte pseudokonvexer Gebiete gelten.

Im Endlichdimensionalen ist dies nicht der Fall, weil das holomorphe und auch das meromorphe Leviproblem positiv gelöst sind d.h. weil jedes pseudokonvexe Gebiet das Existenzgebiet einer holomorphen und einer meromorphen Funktion ist (siehe [7,31]). Mit Hilfe eines Satzes aus [52, SCHOTTENLOHER], der dort den Hauptschritt zur Lösung des holomorphen Leviproblems im Unendlichdimensionalen ausmacht, folgt, daß es auf einem pseudokonvexen Gebiet über einem Banachraum mit Schauderbasis eine holomorphe Funktion gibt, die sich weder holomorph noch meromorph fortsetzen läßt.

Während also in Banachräumen mit Schauderbasis jeder Kontinuitätssatz für holomorphe oder meromorphe Funktionen im Prinzip aus der Pseudokonvexität der Existenzgebiete folgt, gilt dies in nicht separablen Banachräumen nicht mehr uneingeschränkt. In einem Anhang betrachten wir die Situation im Raum $c_0(I)$ der komplexwertigen, bei ∞ verschwindenden Funktionen auf einem überabzählbaren diskreten Raum I . Aus einem Gegenbeispiel von B. JOSEFSON in [30] läßt sich ein Kontinuitätssatz für holomorphe und meromorphe Funktionen herauschälen, der weder für alle stetigen Schnitte pseudokonvexer noch für alle stetigen Schnitte holomorphkonvexer Gebiete gilt. Wir sind jedoch nicht in der Lage, die Holomorphie- und Meromorphiehüllen über $c_0(I)$ durch Kontinuitätssätze zu charakterisieren. Indessen können wir zeigen, daß beide Klassen zusammenfallen, und können eine einfache Beschreibung für die Existenzgebiete holomorpher und meromorpher Funktionen geben.

In einem nullten Kapitel sind grundlegende Definitionen und später benötigte Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Banachräumen und analytischer Mengen in Banachräumen zusammengestellt, so z.B. die RIEMANNschen Hebbarkeitssätze und ein Projektionssatz für analytische Mengen. Soweit es möglich war, wurde nicht nur auf Literaturstellen verwiesen, sondern wurden einfache direkte Beweise gegeben. Im Zusammenhang mit analytischen Mengen mußten wir uns jedoch wesentlich auf die Ergebnisse in [42, RAMIS] stützen; dies ist auch ein Grund dafür, daß sich die Aussagen der Arbeit auf Banachräume beschränken.

Wichtige Aussagen über meromorphe Funktionen sind im ersten Kapitel zusammengetragen. Dessen Schwerpunkt sind jedoch Graphensätze für holomorphe und meromorphe Abbildungen. Dabei geht es um folgende Frage: Kann die Holomorphie einer Abbildung zwischen Banachräumen oder die Meromorphie einer Funktion auf einem Banachraum durch Eigenschaften des Graphen charakterisiert werden, wie dies im Endlichdimensionalen nach [44, REMMERT] möglich ist? Die Frage wird nur teilweise beantwortet. Mit Hilfe der von J.P.RAMIS in [42] entwickelten Theorie der endlichdefinierten analytischen Mengen in Banachräumen wird bewiesen, daß eine Abbildung einer Banachmannigfaltigkeit Ω in einen endlichdimensionalen reduzierten komplexen Raum X genau dann holomorph ist, wenn ihr Graph G analytisch ist und wenn zusätzlich in jedem Punkt (w,x) die Kodimension von G gleich der Dimension von X in x ist oder wenn die Abbildung stetig ist. Ob eine derartige Aussage auch für unendlichdimensionale Bildräume stimmt, bleibt ungeklärt.

Allerdings werden wenigstens noch die meromorphen Funktionen in der bekannten Weise beschrieben: Eine Korrespondenz von einer Banachmannigfaltigkeit Ω in das Produkt von n Riemannschen Zahlensphären, deren Graph vermöge der Projektion eine Modifikation von Ω ist, ist die meromorphe Verbindung von n Funktionen auf Ω , die meromorph oder identisch ∞ sind. Zum Beweis werden aus dem Endlichdimensionalen bekannte Techniken und eine von RAMIS und RUGET stammende Verallgemeinerung des REMMERTschen Abbildungssatzes herangezogen.

Allen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben, danke ich dafür herzlich; insbesondere Herrn Prof.Dr.K.Stein, der seit Beginn meines Studiums mein Lehrer war und mich auf mannigfache Weise gefördert hat, sowie Herrn Prof.Dr.G.Fischer und Herrn Dr.M.Schottenloher.

Bezeichnungen

Alle vorkommenden Vektorräume sind Vektorräume über $\mathbb{C}$, alle lokalkonvexen topologischen Vektorräume werden als Hausdorffsch vorausgesetzt und kurz als lokalkonvexe Räume bezeichnet. Ist E ein topologischer Vektorraum, so ist E' der topologische Dualraum; falls E ein Banachraum ist, trägt E' immer die übliche Normtopologie.

Für einen Banachraum E und $x \in E$, $r > 0$ ist $B_E(x, r)$ oder kurz $B(x, r)$ die offene Kugel $\{y \in E : \|y - x\| < r\}$; im Falle $E = \mathbb{C}$ bezeichnen wir die offene Kreisscheibe $\{y \in \mathbb{C} : |y - x| < r\}$ mit $\Delta(x, r)$.

Der Abschluß einer Teilmenge M eines topologischen Raumes X wird $\overline{M}$ genannt; statt $\overline{B(x, r)}$ oder $\overline{\Delta(x, r)}$ schreiben wir $\overline{B}(x, r)$ bzw. $\overline{\Delta}(x, r)$. $\text{Rd } M$ ist die Menge der Randpunkte von M .

Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $x \in U \subset X$, so ist $\mathcal{G}(U)$ die Menge der stetigen Schnitte von $\mathcal{G}$ über U und $\mathcal{G}_x$ der Halm von $\mathcal{G}$ in x . Alle auftretenden komplexen Räume sind endlichdimensional und reduziert, auch wenn dies nicht ausdrücklich gesagt ist.

Kapitel 0 Grundlegende Definitionen und Sätze

In den ersten beiden Abschnitten erinnern wir an wichtige Grundbegriffe der unendlichdimensionalen Funktionentheorie und legen die im folgenden verwendete Terminologie fest. Der darauffolgende Abschnitt ist ein kurzer Abriß der Theorie der endlichkodimensionalen analytischen Mengen in Banachräumen, der jedoch nicht alle bekannten Ergebnisse sondern nur die von uns benötigten enthält. Dabei stützen wir uns hauptsächlich auf [42, RAMIS]. Der letzte Abschnitt behandelt einfache Fortsetzungssätze für holomorphe Funktionen . Wir haben versucht , für wichtige Sätze , deren Beweise in der Literatur oft nur im Kontext verständlich sind , andere möglichst einfache Beweise zu führen .

a) Holomorphe Abbildungen

Eine ausführliche Darstellung der Theorie der holomorphen Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen findet man z.B. in [8,9, BOCHNAK-SICIAK ; 38 , NACHBIN ; 39, NOVERRAZ]; wir zitieren hier lediglich einige Definitionen und Sätze.

Ω sei eine offene Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes E über $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt G -analytisch,

wenn sie auf allen affinen komplexen Geraden holomorph ist d.h. wenn $\lambda \longrightarrow f(a+\lambda b)$ für alle $a, b \in E$ in $\{\lambda \in \mathbb{C} : a+\lambda b \in \Omega\}$ holomorph ist; ist sie zusätzlich stetig, so nennen wir sie holomorph.

Eine Abbildung $g: \Omega \longrightarrow F$ in einen folgenvollständigen lokalkonvexen Vektorraum F heißt G-analytisch, wenn $\mu \circ g$ für alle $\mu \in F'$ G-analytisch ist; eine stetige G-analytische Abbildung nennen wir holomorph. Ist E metrisierbar, so ist eine Abbildung g schon holomorph, wenn sie schwach holomorph ist d.h. wenn $\mu \circ g$ holomorph ist für alle $\mu \in F'$.

Wichtige Beispiele G-analytischer Abbildungen sind die linearen und multilineareren Abbildungen sowie die homogenen Polynome vom Grad m , das sind Kompositionen der Diagonalabbildung $\Delta: E \longrightarrow E^m, x \longrightarrow (x, \dots, x)$ mit einer m -linearen Abbildung $E^m \longrightarrow F$. Die Komposition holomorpher Abbildungen ist wieder holomorph.

Sind Urbild- und Bildraum Banachräume, so ist die Holomorphie äquivalent zur komplexen FRECHET-Differenzierbarkeit und zur Analytizität d.h. zur Möglichkeit, die Abbildung lokal in eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger homogener Polynome zu entwickeln.

Aus der Definition der G-Analytizität ergibt sich unmittelbar der folgende Identitätssatz.

(0.1) Identitätssatz : Ω sei ein Gebiet in einem lokalkonvexen Raum E ; $f: \Omega \longrightarrow F$ und $g: \Omega \longrightarrow F$ seien G-analytische Abbildungen, die auf einer offenen, nicht leeren Menge übereinstimmen. Dann gilt $f = g$.

(0.2) Satz von ZORN : E sei ein Bairescher lokalkonvexer Vektorraum, und F sei ein folgenvollständiger lokalkonvexer Vektorraum. Ω sei ein Gebiet in E , $f: \Omega \longrightarrow F$ sei G -analytisch. Ist f in einem Punkt von Ω stetig, so schon in ganz Ω .

Beweis : [8,9,39]

(0.3) Satz von HARTOGS : E_1 und E_2 seien lokalkonvexe Vektorräume; einer von ihnen sei metrisierbar, und $E_1 \times E_2$ sei Bairesch. Ω sei ein Gebiet in $E_1 \times E_2$, und F sei ein folgenvollständiger lokalkonvexer Vektorraum. Dann ist jede partiell holomorphe Abbildung $f: \Omega \longrightarrow F$ holomorph.

Beweis : [8,9,39].

Weil die Komposition holomorpher Abbildungen holomorph ist, kann man in der üblichen Weise komplexe Mannigfaltigkeiten mit folgenvollständigen lokalkonvexen Modellräumen und holomorphe Abbildungen zwischen ihnen definieren. Sind sie über Banachräumen modelliert, so sprechen wir von Banachmannigfaltigkeiten. Zur Theorie der Banachmannigfaltigkeiten siehe z.B. [11, BOURBAKI].

Eine stetige Abbildung ϕ einer komplexen Mannigfaltigkeit in einen (endlichdimensionalen) reduzierten komplexen Raum X nennen wir holomorph, wenn für jede holomorphe Funktion f auf einem Gebiet $U \subset X$ $f \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)}$ holomorph ist. Äquivalent dazu ist, daß für jede Einbettung $\iota: U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ einer offenen Teilmenge U von X die Abbildung $\iota \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)}$

holomorph ist.

Eine Abbildung f von einer analytischen Menge A in einem Gebiet des $\mathbb{C}^n$ in einen folgenvollständigen lokalkonvexen Vektorraum F heißt holomorph, wenn es zu jedem $x \in A$ eine Umgebung U von x im $\mathbb{C}^n$ und eine holomorphe Abbildung $g: U \xrightarrow{f} F$ gibt, so daß $f|_{A \cap U} = g|_{A \cap U}$. Nach [16 , BUNGART] ist eine Abbildung $f: A \rightarrow F$ genau dann holomorph, wenn sie schwach holomorph ist, d.h. wenn für alle $\mu \in F'$ $\mu \circ f$ holomorph ist. Mit Hilfe lokaler Karten und lokaler Einbettungen kann man nun sagen, wann eine Abbildung von dem Produkt einer komplexen Mannigfaltigkeit und einem reduzierten komplexen Raum in eine komplexe Mannigfaltigkeit holomorph heißen soll. Wir werden dies später bei der Charakterisierung der Holomorphie von Abbildungen durch die Analytizität ihres Graphen brauchen.

Die Garbe der holomorphen Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X^Y$; statt $\mathcal{O}_X^\mathbb{C}$ schreiben wir $\mathcal{O}_X$.

b) Gebiete über lokalkonvexen Räumen

Weil bei der analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionen Mehrdeutigkeiten auftreten können, ist es zweckmäßig, wie schon im Endlichdimensionalen nichtschlichte Definitionsbereiche einzuführen.

E sei ein folgenvollständiger lokalkonvexer Vektorraum. Eine Mannigfaltigkeit über E ist eine lokaltopologische Abbildung $p: \Omega \longrightarrow E$ eines Hausdorffraumes Ω nach E ; ist Ω zusammenhängend, so sprechen wir von einem Gebiet über E . Diese Bezeichnungen werden dadurch gerechtfertigt, daß auf Ω durch p auf kanonische Weise eine komplexe Mannigfaltigkeitsstruktur induziert wird.

$p: \Omega \longrightarrow E$ sei eine Mannigfaltigkeit über E . Für $x \in \Omega$ und $a \in E$ definieren wir die Randdistanz in Richtung a als

$$\delta_{\Omega}(x, a) := \sup \{ r > 0 : \text{Es gibt eine zusammenhängende Menge } D \subset \Omega, \text{ so daß } x \in D \text{ und} \\ p|_D \longrightarrow p(x) + \Delta(0, r) a \text{ topologisch} \\ \text{ist} \} .$$

Ist E normiert, so definieren wir die Randdistanz schlechthin als

$$d_{\Omega}(x) := \sup \{ r > 0 : \text{Es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x, \text{ so} \\ \text{daß } p|_U \longrightarrow B(p(x), r) \text{ topologisch ist} \} .$$

d_{Ω} ist stetig auf Ω , δ_{Ω} ist nach unten halbstetig auf $\Omega \times E$. Einer Teilmenge $M \subset \Omega$ ordnen wir eine Randdistanz $d_{\Omega}(M) := \inf \{ d_{\Omega}(x) : x \in M \}$. Jede kompakte Menge hat eine positive Randdistanz.

Ein Schnitt von p über einer Teilmenge D von E ist eine Abbildung $\sigma: D \longrightarrow \Omega$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_D$.

(0.4) Identitätssatz : Zwei stetige Schnitte von p über einer zusammenhängenden Menge $D \subseteq E$ stimmen auf D schon überein, wenn sie in nur einem Punkt von D übereinstimmen.

(0.5) Lemma : σ sei ein Schnitt von p über $D \subseteq E$. $x \in D$ habe bezüglich D eine Umgebungsbasis aus Mengen U mit der Eigenschaft, daß sich jedes $y \in U$ mit x durch einen Weg in U verbinden läßt, auf dem σ stetig ist.

Dann ist σ in einer Umgebung von x stetig.

Beweis: Es gibt eine Umgebung V von $\sigma(x)$ und eine Umgebung W von x , so daß $p|V \longrightarrow W$ topologisch ist; s sei die Umkehrabbildung. Wähle eine Umgebung U von x in $W \cap D$ mit der angegebenen Eigenschaft. Dann folgt mit (0.4) $s(y) = \sigma(y)$ für jedes $y \in U$. q.e.d.

(0.6) Lemma : σ sei ein stetiger Schnitt von p über der kompakten Menge $K \subseteq E$. Dann gibt es eine Umgebung U von K und einen stetigen Schnitt τ von p über U , der σ fortsetzt.

Beweis: Zu $x \in K$ gibt es zusammenhängende Umgebungen V von $\sigma(x)$ und W von x , so daß $p|V \longrightarrow W$ topologisch ist und $\sigma(W \cap K) \subseteq V$, also $\sigma|W \cap K = (p|V)^{-1}|W \cap K$. Weil K kompakt ist, wird es bereits von endlich vielen solcher Umgebungen

überdeckt, sagen wir von $W_1, \dots, W_l$. $U_1 := W_1$. Für $i = 2, \dots, l$ sei $U_i := U_{i-1} \cup W_i$ ohne die Zusammenhangskomponenten von $U_{i-1} \cap W_i$, die K nicht treffen. Dann ist $U := U_l$ eine Umgebung von K , und die $(p|_{V_i})^{-1}$ definieren auf U eine stetige Fortsetzung von σ . q.e.d.

Ein Morphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten $p: \Omega \longrightarrow E$ und $q: \Xi \longrightarrow E$ ist eine stetige Abbildung $\varphi: \Omega \longrightarrow \Xi$ mit $p = q \circ \varphi$. Jeder Morphismus ist lokal topologisch. $\mathcal{Q}$ sei eine Hausdorffsche Garbe (aufgefaßt als espace étalé) auf E . Mit $p^*\mathcal{Q}$ bezeichnen wir die Urbildgarbe unter p . Jeder Morphismus φ wie oben induziert einen Garbenmorphismus $\varphi^*: q^*\mathcal{Q} \longrightarrow p^*\mathcal{Q}$.

Es seien $p: \Omega \longrightarrow E$ ein Gebiet und $S \subset p^*\mathcal{Q}(\Omega)$. Die Morphismen φ von p in Gebiete $q: \Xi \longrightarrow E$, derart daß φ^* einen Isomorphismus einer Teilmenge $S_q \subset q^*\mathcal{Q}(\Xi)$ auf S induziert, bilden in naheliegender Weise eine Kategorie, die Kategorie der S -Fortsetzungen. Ihre Finalobjekte (die zueinander isomorph sind) heißen maximale S -Fortsetzungen. Sind $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_E$ (und somit $p^*\mathcal{Q} = \mathcal{O}_\Omega$) und $S = \mathcal{O}_\Omega(\Omega)$, so heißt jede maximale S -Fortsetzung Holomorphiehülle von p . Meist nennt man sie jedoch etwas ungenau Holomorphiehülle von Ω ; falls E ein Banachraum ist, ist dies auch gerechtfertigt, weil man zeigen kann, daß die komplexe Struktur der Holomorphiehülle nur von der komplexen Struktur von Ω abhängt und nicht der gerade gewählten Projektion p . Analog definiert man im Falle, daß $\mathcal{Q}$ die Garbe der meromorphen Funktionen auf E ist (siehe Kapitel 1) die Meromorphiehülle von Ω .

Besteht S nur aus einem Element f , so nennt man die maximale S -Fortsetzung Existenzgebiet von f . Man kann zeigen, daß für jede Hausdorffgarbe $\mathcal{Q}$ auf E und jedes $f \in p^*\mathcal{Q}(\Omega)$ das Existenzgebiet von f existiert: ist nämlich $x \in \Omega$ beliebig und faßt man vermöge p^* den Keim f_x als Element von $\mathcal{Q}$ auf, so ist die Zusammenhangskomponente von f_x in $\mathcal{Q}$ in natürlicher Weise das Existenzgebiet von f . Mit Hilfe verallgemeinerter Durchschnitte von Gebieten über E folgt, daß es zu jeder Teilmenge $S \subseteq p^*\mathcal{Q}(\Omega)$ eine maximale S -Fortsetzung gibt.

Die eben angedeuteten Methoden sind ausführlich dargestellt in [51, SCHOTTENLOHER], vgl. auch [49, 58] und [17, COEURE].

0' Analytische Mengen in Banachsäumen

Es ist von fundamentaler Bedeutung für die Untersuchung analytischer Mengen und holomorpher Funktionenräume, daß sich der WEIERSTRASSsche Vorbereitungsatz auch in unendlichdimensionalen Räumen beweisen läßt.

(0.1) WEIERSTRASSscher Vorbereitungsatz:

E sei ein lokalconvexer Raum, und U sei eine in einer Nullumgebung von E holomorphe Funktion. Es gebe ein $a \in U$, $a \neq 0$, so daß $\lambda \rightarrow f(\lambda)$ in U eine Nullstelle der Ordnung s hat. $E = F \oplus G$ sei eine direkte Zerlegung.

Dann gibt es eine Nullumgebung $V = U \cap \{x \in G, |x| \leq r\}$, eine eindeutig bestimmte holomorphe verschwindende holomorphe Funktion $\tilde{f}$ auf V sowie genau ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T, \lambda]$ von Grad s , so daß $f(x + \lambda a) = \tilde{f}(x + \lambda a) + p(x, \lambda)$ für alle $x \in V$, und $\lambda \in \Delta(C, r)$.

Beweis: [S. 9, BOCHNER-SILVERMAN; 12, S. 116]

Analytische Mengen lassen sich natürlich in allen Räumen definieren, auf denen holomorphe Funktionen erklärt sind, also insbesondere auf endlichdimensionalen komplexen Räumen und auf komplexen Mannigfaltigkeiten, die über folgenvollständigen lokalconvexen Räumen modelliert sind (siehe Abschnitt 1'). Ist ein Raum ganz wesentlich auf die Ergebnisse von S. 11, 12 und 13 angewiesen, so

lytische Mengen in Banachräumen zurückgreifen werden, beschränken wir uns von vorn herein auf Banachmannigfaltigkeiten und endlichdimensionale komplexe Räume. Allgemeine banachanalytische Räume im Sinne von DOUADY werden wir nicht betrachten.

Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit und X ein reduzierter komplexer Raum. Weil wir im nächsten Abschnitt die Holomorphie von Abbildungen durch Eigenschaften ihrer Graphen charakterisieren wollen, treffen wir folgende Definition. Eine Teilmenge $A \subset \Omega \times X$ heißt analytisch, wenn es zu jedem Punkt $z \in \Omega \times X$ eine Umgebung U und eine holomorphe Abbildung f von U in einen Banachraum F gibt, so daß $A \cap U = f^{-1}(0)$. Sie heißt endlichdimensional, wenn es zu jedem $z \in A$ eine Umgebung $V \times W$ und eine endlichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit Ξ von V gibt, so daß $A \cap (V \times W) \subset \Xi \times W$. Eine in Ω analytische Menge A , die von Ω verschieden ist, zerlegt Ω nirgends d.h. $\Omega - A$ ist zusammenhängend für alle zusammenhängenden offenen $U \subset \Omega$. (siehe [42, RAMIS, II.1.1.3])

(0.8) Lemma : Das kartesische Produkt, der Durchschnitt und die Vereinigung endlich vieler analytischer Mengen sind analytisch.

Beweis: A_i sei in U_i analytisch und dort durch $f_i: U_i \rightarrow F_i$ definiert, $i = 1, 2$. $A_1 \times A_2$ ist die Nullstellenmenge des Produktes $f_1 \times f_2$. Sei $U_1 = U_2$. Dann wird $A_1 \cap A_2$ durch die Verbindung (f_1, f_2) beschrieben. Die kanonische Einbettung von F_i in F_i'' induziert eine holomorphe Abbildung

$\psi: F_1 \times F_2 \longrightarrow L^2(F'_1 \times F'_2)$. Weil $\psi(x_1, x_2) = 0$ genau dann, wenn mindestens ein $x_i = 0$, wird $A_1 \cup A_2$ durch $\psi \cdot (f_1, f_2)$ definiert. q.e.d.

Kodimension. Ist A analytisch in einem Gebiet Ω eines Banachraumes E , so definiert man als Kodimension von A in $x \in A$

$\text{codim}_x A := \text{codim}_x^\Omega A := \sup \{ n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} : \text{Es gibt einen affinen komplexen Teilraum } F \text{ der Dimension } n , \text{ so da\ss } x \text{ in } A \cap F \text{ isoliert ist} \}$.

Diese Definition ist invariant gegenüber holomorphen Abbildungen [42, p.70,74] und überträgt sich deshalb mit Hilfe von Karten auf analytische Mengen in Mannigfaltigkeiten.

A sei analytisch in einem Gebiet Ω eines Banachraumes E . Es sei $x \in A$. Ist F ein affiner Teilraum mit $\dim F \leq \text{codim}_x A$, derart da\ss x in $A \cap F$ isoliert ist, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $\dim F \leq n \leq \text{codim}_x A$ einen F umfassenden n -dimensionalen affinen Teilraum H , derart da\ss x in $A \cap H$ isoliert ist [42, II.3.1.1.]. Sei $0 \in A$ und $\text{codim}_0 A \geq n$. Dann ist die Menge der n -dimensionalen Unterräume von E , in deren Schnitt mit A 0 isoliert ist, eine offene und dichte Teilmenge der Graßmannmannigfaltigkeit der n -dimensionalen Unterräume von E [42,p.89]. Deshalb gilt für zwei analytische Mengen A_1 und A_2 mit $x \in A_1 \cap A_2$ stets $\text{codim}_x A_1 \cup A_2 = \min \{ \text{codim}_x A_1 , \text{codim}_x A_2 \}$.

A sei eine analytische Menge in einer Banachmannigfaltigkeit Ω . Ein Punkt $x \in A$ heißt regulär oder gewöhnlich, wenn er eine Umgebung U besitzt, so daß $A \cap U$ eine direkte komplexe Untermannigfaltigkeit von U ist. Vermöge lokaler Einbettungen in einen $\mathbb{C}^n$ überträgt sich diese Definition auf analytische Mengen in dem Produkt einer Banachmannigfaltigkeit mit einem komplexen Raum. Ein nicht regulärer Punkt wird singulär genannt. A^* bezeichne die Menge der regulären Punkte von A . Im Gegensatz zum Endlichdimensionalen ist A^* nicht immer dicht in A . Immerhin gilt für jeden Berührungspunkt x von A^*

$$\text{codim}_x A = \liminf_{\substack{y \in A^* \\ y \rightarrow x}} \text{codim}_y A$$

und jeder Punkt, in dem A endliche Kodimension hat, ist Berührungspunkt von A^* [42, Th. II.3.3.8.].

Ist die Kodimension von A in einem Punkt mindestens n ($n \in \mathbb{N}$), so auch in allen Punkten einer vollen Umgebung [42, II.3.3.1.] .

Die symmetrische Potenz. Der Schlüssel zur Untersuchung der lokalen Gestalt analytischer Mengen im $\mathbb{C}^n$ ist der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz; mit seiner Hilfe läßt sich nämlich das Problem zurückführen auf die Frage, wie das Nullstellengebilde von Polynomen von deren Koeffizienten abhängt. Auch für eine spezielle Klasse analytischer Mengen in Banachräumen ist dies möglich [42, RAMIS]. Bei den Nullstellen eines Polynoms einer Variablen inter-

essiert zwar ihre Vielfachheit, nicht aber irgendeine Anordnung. Dies ist der Ausgangspunkt zur Einführung der symmetrischen Potenz und der holomorphen Multifunktion. Diese Begriffe gestatten es, schon länger bekannte Beweismethoden elegant zu formulieren. Für den endlichdimensionalen Fall ist dies in [60, WHITNEY] dargestellt; jedoch läßt sich ein großer Teil dessen auch in Banachräumen durchführen. Wir wollen dies nur in dem Umfang tun, in dem wir diese Methoden zum Beweis des Projektionssatzes weiter unten benötigen.

X sei eine Menge. Die Gruppe $\mathfrak{S}_m$ der Permutationen von $\{1, \dots, m\}$ operiert auf X^m vermöge $\pi(x_1, \dots, x_m) := (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)})$, $\pi \in \mathfrak{S}_m$. Die Menge der Orbits wird m -te symmetrische Potenz von X genannt und mit X_{sym}^m bezeichnet. $\eta: X^m \longrightarrow X_{\text{sym}}^m$ sei die kanonische Projektion. Trägt X eine Topologie, so wird X_{sym}^m immer mit der Finaltopologie bezüglich η versehen.

Aus [60, WHITNEY] übernehmen wir die beiden folgenden Lemmata.

(0.9) Lemma : Ist X ein Hausdorffraum und sind $U_1, \dots, U_m$ paarweise disjunkte Teilmengen von X , so ist $\eta|_{U_1 \times \dots \times U_m} \longrightarrow \eta(U_1 \times \dots \times U_m)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: [60, p.362]

(0.10) Lemma : X, Y und Z seien topologische Räume, und $h: X \longrightarrow Y_{\text{sym}}^m$ und $g: X \times Y \longrightarrow Z$ seien stetig. Dann wird durch

$g, h(x) := \eta(g(x, y_1), \dots, g(x, y_m))$, wobei
 $h(x) = \eta(y_1, \dots, y_m)$, eine stetige Abbildung
 $g, h : X \longrightarrow Z_{\text{sym}}^m$ definiert.

Beweis: [60, p.372]

Funktionentheoretische Bedeutung erhält die symmetrische Potenz erst dadurch, daß sich die symmetrische Potenz des $\mathcal{C}^N$ als analytische Menge in einem $\mathcal{C}^N$ (N genügend groß) einbetten und auf diese Weise mit einer komplexen Struktur versehen läßt. Wir zeigen hier nur, daß die symmetrische Potenz jedes Banachraumes stetig und injektiv in einen geeigneten Banachraum abgebildet werden kann.

E sei ein Banachraum. Mit $P^m(E)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen homogenen Polynome vom Grade m auf E und mit $P_m(E)$ den der stetigen Polynome vom Grade $\leq m$. Die kanonische Einbettung $j: E \longrightarrow E'$ induziert eine Abbildung $\psi^m: E^m \longrightarrow P^m(E')$, nämlich

$$(a_1, \dots, a_m) \longmapsto j(a_1) \cdot \dots \cdot j(a_m) ;$$

dabei ist das Produkt als punktweise Multiplikation der Funktionale zu verstehen, also

$$[j(a_1) \cdot \dots \cdot j(a_m)](x) = x(a_1) \cdot \dots \cdot x(a_m) \quad \text{für } x \in E'.$$

σ_k sei die k -te elementarsymmetrische Funktion in m Veränderlichen. Wir definieren für $(a_1, \dots, a_m) \in E^m$ ein stetiges Polynom $\sigma_k(a_1, \dots, a_m)$ vom Grade k durch

$$\sigma_k(a_1, \dots, a_m)(x) := \sigma_k(x(a_1), \dots, x(a_m))$$

für alle $x \in E'$. Damit erhält man eine Abbildung

$$\psi_m: E^m \longrightarrow P_m(E'), \quad (a_1, \dots, a_m) \longmapsto \sum_{k=1}^m \sigma_k(a_1, \dots, a_m) .$$

$P^k(E')$ ist auf natürliche Weise ein Banachraum (siehe z.B. [38, NACHBIN]) : zu jedem $\omega \in P^k(E')$ gibt es genau eine stetige symmetrische k -Linearform $\tilde{\omega}$ auf $(E')^k$ mit $\omega = \tilde{\omega} \cdot \Delta$, und man setzt $\|\omega\| = \|\tilde{\omega}\|$. Auf $P_m(E')$ nehmen wir als Norm das Maximum der Normen der homogenen Anteile, wodurch $P_m(E')$ ebenfalls ein Banachraum wird.

ψ^m und ψ_m sind dann holomorphe Abbildungen. Weil sie symmetrisch sind, lassen sie sich durch stetige Abbildungen ϕ^m und ϕ_m über die m -te symmetrische Potenz E_{sym}^m faktorisieren.

(O.11) Lemma :

i) $\phi_m: E_{\text{sym}}^m \longrightarrow P_m(E')$ ist injektiv.

ii) $\phi^m(a_1, \dots, a_m) = 0 \iff$ mindestens ein $a_i = 0$.

Beweis: i) ähnlich wie in [60, WHITNEY, p.367].

Da ii) später gebraucht wird, sei der Beweis von $\Rightarrow$ kurz angedeutet: Sind alle $a_i \neq 0$, so sind die $H_i := \{x \in E' : x(a_i) = 0\}$ Hyperebenen, und es gibt folglich ein $y \in E' \setminus \bigcup \{H_i : i=1, \dots, m\}$. Es ist dann $y(a_i) \neq 0$ für alle i im Widerspruch zu $\phi^m(a_1, \dots, a_m) = 0$. q.e.d.

Ist E endlichdimensional, so kann man $P_m(E')$ topologisch isomorph auf einen $\mathbb{C}^N$ abbilden, indem man in E eine Basis wählt und jedem Polynom die Koeffizienten seiner homogenen Bestandteile bezüglich dieser Basis zuordnet.

In diesem Falle ist ϕ_m eigentlich, und das Bild von ϕ_m ist eine analytische Menge im $\mathbb{C}^N$. Im Falle $E = \mathbb{C}$ weiß man sogar noch mehr.

(0.12) Satz : Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$\Phi_m: \Phi_{\text{sym}}^m \longrightarrow \Phi^m \text{ ein Homöomorphismus.}$$

Beweis: [60 , Appendix V,4]

Die wesentliche Aussage dieses Satzes ist diejenige , daß die Wurzeln eines Polynomes m -ten Grades in einer Veränderlichen stetig von den Koeffizienten abhängen . Die Umkehrabbildung von Φ_m ordnet nämlich den Koeffizienten $(a_1, \dots, a_m)$ des Polynoms $u^m + a_m u^{m-1} + \dots + a_2 u + a_1$ gerade das System seiner Nullstellen zu ; denn die Komponenten von Φ_m sind ja gerade die Faktorisierungen der elementarsymmetrischen Funktionen über Φ_{sym}^m .

Ein Projektionssatz für analytische Mengen . In den späteren Kapiteln werden wir des öfteren die folgenden beiden Aussagen (0.13) und (0.14) benötigen. Im Endlichdimensionalen sind sie Spezialfälle eines wohlbekannten Satzes über endliche Abbildungen (siehe z.B. [22 , FISCHER , 3.2]).

(0.13) Satz : E_1 sei ein Banachraum, $E = E_1 \times \Phi$, und $\pi: E \longrightarrow E_1$ sei die Projektion längs Φ . U sei offen in E_1 , Δ_1 und Δ_2 seien Kreisscheiben in Φ , $\overline{\Delta_2} \subset \Delta_1$. $A \subset U \times \Delta_2$ sei analytisch in $U \times \Delta_1$. Dann ist $\pi(A)$ analytisch in U , und für alle

$x \in \pi(A)$ gilt

$$\min \{ \text{codim}_Y A : y \in \pi^{-1}(x) \cap A \} = \text{codim}_X \pi(A) + 1 .$$

(0.14) Korollar : E_1 sei ein Banachraum, $E = E_1 \times \mathbb{C}^n$,
 $\pi: E \rightarrow E_1$ sei die Projektion längs $\mathbb{C}^n$. U sei of-
 fen in E_1 , Q_1 und Q_2 seien Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ mit
 $\overline{Q_2} \subset Q_1$. $A = U \times Q_2$ sei analytisch in $U \times Q_1$.
 Dann ist $\pi(A)$ analytisch in U , und für alle
 $x \in \pi(A)$ gilt

$$\min \{ \text{codim}_Y A : y \in \pi^{-1}(x) \cap A \} = \text{codim}_X \pi(A) + n .$$

Die Aussage (0.14) findet sich schon in [42, RAMIS ,
 II.3.3.7., III.2.2.1.]. Der Beweis wird dort jedoch et-
 was anders geführt als wir es tun wollen. Wir werden uns
 an die Ausführung in [60, WHITNEY , p.48] anlehnen ,
 die ihrerseits auf [45, REMMERT-STEIN] basiert.

(0.15) Lemma : E_1 sei ein Banachraum, U sei offen in E_1 ,
 und Δ sei eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. f sei eine ho-
 lomorphe Funktion auf $U \times \Delta$, und $f^{-1}(0) \cap (\{x\} \times \Delta)$
 bestehe für jedes $x \in U$ aus genau einem Punkt $(x, \xi(x))$.
 Dann ist ξ holomorph auf U .

Beweis: Lokal gilt

$$\xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{d}{dz} f(x, z)}{f(x, z)} dz ,$$

wobei Γ eine geeignete positiv orientierte Kreisl Linie in
 Δ ist .

q.e.d.

Beweis von (0.13) : Sei $z \in U$. Es gibt eine Umgebung U_1 von z und Kreisscheiben $D_1, \dots, D_r$ in $\mathbb{C}$, so daß $A \cap (U_1 \times \Delta_1) \subset \bigcup \{ U_1 \times D_i : i=1, \dots, r \}$ und A in jedem $U_1 \times D_i$ durch eine holomorphe Abbildung $f_i : U_1 \times D_i \longrightarrow F_i$ definiert wird . Es lassen sich $\mu_i \in F_i'$ finden, so daß $\mu_i \circ f_i$ auf $\{z\} \times D_i$ nicht identisch verschwindet. Indem man nötigenfalls U_1 verkleinert und andere Kreisscheiben D_i wählt, kann man mit dem WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz ein WEIERSTRASSpolynom w_i auf $U_1 \times D_i$ finden, das dort die gleichen Nullstellen wie $\mu_i \circ f_i$ hat . Die folgenden Überlegungen müssen für jedes i durchgeführt werden ; der Übersichtlichkeit halber lassen wir den Index i weg .

w habe den Grad m . $h : U_1 \longrightarrow \Phi_{\text{sym}}^m$ ordne jedem $x \in U_1$ das Nullstellensystem von w über x zu . Nach (0.12) ist h stetig , und aus (0.10) folgt die Stetigkeit von $g := \Phi^m \circ f \circ h : U_1 \longrightarrow P^m(F')$. δ sei die Diskriminante von w . $N := \{y \in U_1 : \delta(y) = 0\}$ ist analytisch . Mit (0.15) folgt, daß jedes $x \in U_1 - N$ eine Umgebung W hat, in der $h(y) = (\eta(\xi_1(y)), \dots, \xi_m(y))$ mit m auf W holomorphen Funktionen $\xi_1, \dots, \xi_m$. Weil $g(y) = \Phi^m(f(y, \xi_1(y)), \dots, f(y, \xi_m(y)))$ für alle y in einer genügend kleinen Umgebung von x auf Grund von (0.9) und (0.10) gilt, ist auch g in einer Umgebung von x und somit auf $U_1 - N$ holomorph .

Nach dem ersten RIEMANNschen Hebbarkeitssatz (0.20) im nächsten Abschnitt ist g sogar auf ganz U_1 holomorph. Wegen (0.11)ii) ist $\pi(A \cap (U_1 \times D)) = \{x \in U_1 : g(x) = 0\}$. Da dies alles für jedes $i=1, \dots, r$ gilt , ist damit ge-

zeigt, daß $\pi(A) \cap U_1$ die Vereinigung der endlich vielen analytischen Mengen $\{x \in U_1: g_i(x) = 0\}$ ist .

Die Ungleichung $\text{codim}_y A \geq \text{codim}_x \pi(A) + 1$ für jedes $y \in \pi^{-1}(x) \cap A$ folgt unmittelbar aus der Definition der Kodimension. Umgekehrt kann man folgendermaßen schließen: Weil $\pi^{-1}(x) \cap A$ endlich ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq \min\{\text{codim}_y A : y \in \pi^{-1}(x) \cap A\}$, einen $(k-1)$ -dimensionalen Teilraum H von E_1 , derart daß y in $A \cap (y + H \times \mathbb{C})$ isoliert ist. Folglich liegt x isoliert in $\pi(A) \cap (x + H)$, also $\text{codim}_x \pi(A) \geq k-1$. q.e.d.

Das Korollar (0.14) ergibt sich aus (0.13) wie in [60, p.49] durch vollständige Induktion nach n .

Endlichdefinierte analytische Mengen . Während viele bekannte Aussagen über analytische Mengen im $\mathbb{C}^n$ für beliebige analytische Mengen in unendlichdimensionalen Banachräumen nicht mehr zutreffen, so sind sie doch noch für eine spezielle, von RAMIS eingeführte Klasse analytischer Mengen richtig. Eine analytische Menge heißt endlichdefiniert , wenn sie lokal die Menge der gemeinsamen Nullstellen endlich vieler holomorpher Funktionen ist. Ist die in einer Banachmannigfaltigkeit Ω analytische Menge A in einer Umgebung von $x \in A$ durch n holomorphe Funktionen definierbar, so ist $\text{codim}_x A \leq n$; umgekehrt ist A endlichdefiniert, falls die Funktion $x \longmapsto \text{codim}_x A$ lokalbeschränkt ist [42 , RAMIS , p.75].

Jeder Mengenkeim einer endlichdefinierten analytischen Menge kann in endlich viele endlichdefinierte irreduzible Komponenten zerlegt werden, wobei die übliche Eindeutigkeitsaussage gilt [RAMIS, p.60].

Endlichdefinierte analytische Mengen kann man lokal als analytische verzweigte Überlagerung eines Gebietes in einem Banachraum darstellen, weil man den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz zur Verfügung hat und wie im Endlichdimensionalen vollständige Induktion über die Kodimension machen kann (vgl. [45, REMMERT-STEIN]). Wir fassen einige Ergebnisse von [RAMIS] sowie einige Folgerungen daraus zusammen.

(0.16) Satz : E sei ein Banachraum und $E = E_1 \times E_2$ eine direkte Zerlegung.

- a) A sei eine endlichdefinierte analytische Menge in einem Gebiet von E . A sei in $O \in A$ irreduzibel; O sei isoliert in $A \cap E_2$, $\dim E_2 = \text{codim}_O A$. Dann gibt es zu jeder Nullumgebung W in E eine Kugel U in E_1 mit Mittelpunkt O und einen Polyzylinder Q in E_2 mit Mittelpunkt O (nach Wahl einer Basis in E_2), so daß $U \times Q \subset W$ und die Beschränkung $\pi|_{A \cap (U \times Q)} \longrightarrow U$ der Projektion $\pi: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ eine analytische verzweigte Überlagerung ist.

- b) G sei ein endlichdefinierter analytischer Mengenkeim in $O \in E$, $G \cap E_2 = \{O\}$, $\text{codim}_O G = \dim E_2 = m$.

$G = \cup \{G_k : k=1, \dots, l\}$ sei die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gibt es zu jeder Nullumgebung W in E eine Kugel U in E_1 mit Mittelpunkt O und einen Polyzylinder $Q = \Delta_m \times \dots \times \Delta_1$ in E_2 (nach Wahl einer geeigneten Basis) sowie Repräsentanten A_k von G_k in $U \times Q$, so daß $U \times Q \subset W$ und die kanonische Projektion $\pi: A_k \longrightarrow U \times \Delta_m \times \dots \times \Delta_{d_k}$ ($d_k := \text{codim } G_k$) eine verzweigte analytische Überlagerung ist für jedes k .

Beweis: [42, RAMIS , II.2.3.7., II.3.2.1., II.3.2.2.]
unter Verwendung von [RAMIS , II.2.1.4., II.2.2.4.,
II.2.2.12.].

Dabei ist unter einer analytischen Überlagerung folgendes zu verstehen.

(0.17) Definition (vgl. [RAMIS , p.35,36]):

Eine unverzweigte analytische Überlagerung eines Banachraumes E_1 ist eine Abbildung $\pi: X \longrightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften:

Es gibt einen Banachraum $E = E_1 \times E_2$ mit $\dim E_2 < \infty$; U ist ein Gebiet in E_1 , X eine abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit in $U \times E_2$, und π ist die Beschränkung der Projektion längs E_2 . Für jedes $x \in U$ ist die Faser $\pi^{-1}(x)$ endlich und nicht leer. Zu $(x_1, x_2) \in X$ gibt es Umgebungen V_1 von x_1 in U und V_2 von x_2 in E_2 , so daß $X \cap (V_1 \times V_2)$ der Graph einer holomorphen Abbildung von V_1 nach V_2 ist.

Eine verzweigte analytische Überlagerung eines Banachraumes E_1 ist eine Abbildung $\pi: X \longrightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften :

Es gibt einen Banachraum $E = E_1 \times E_2$ mit $\dim E_2 < \infty$; U ist ein Gebiet in E_1 , X ist eine abgeschlossene Teilmenge von $U \times E_2$, und π ist die Beschränkung der Projektion längs E_2 . Es gibt eine analytische Teilmenge N von U , so daß X der Abschluß von $X_0 := X \cap ((U - N) \times E_2)$ in $U \times E_2$ und $\pi|_{X_0} \longrightarrow U - N$ eine unverzweigte analytische Überlagerung ist .
Zu jedem $x \in U$ gibt es eine Umgebung V_x in U und ein Kompaktum K_x in E_2 , so daß $X \cap (V_x \times E_2) \subset V_x \times K_x$.

Ist $\pi: X \longrightarrow U$ eine verzweigte analytische Überlagerung , so ist π offen, und jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis in $E_1 \times E_2$ aus Polyzylindern $V \times W$, derart daß $\pi|_{V \times W} \longrightarrow V$ wieder eine verzweigte analytische Überlagerung ist [RAMIS , II.2.1.4.]. Außerdem ist X eine analytische Menge in $U \times E_2$, die dort durch endlich viele holomorphe Funktionen definiert werden kann [RAMIS , II.2.1.1.].

Für endlichdefinierte analytische Mengen gibt es eine Verallgemeinerung des REMMERTschen Abbildungssatzes.

(0.18) Satz : f sei eine holomorphe Abbildung einer Banachmannigfaltigkeit Ω in eine andere Ξ .

A sei eine endlichdefinierte analytische Menge

in Ω und $f|A \rightarrow \Xi$ sei eigentlich, überdies sei f epidermisch d.h. die Ableitung von f sei in jedem Punkt ein Fredholmoperator. Dann ist $f(A)$ eine endlichdefinierte analytische Menge Ξ in .

Beweis: [43 , RAMIS-RUGET]

Endlichdefinierte analytische Mengen lassen sich wie im Endlichdimensionalen in irreduzible Komponenten zerlegen: ist A endlichdefiniert und sind $Y_i, i \in I$, die Zusammenhangskomponenten von A^* , so bilden die $X_i := \overline{Y_i}, i \in I$, eine lokalendliche Familie endlichdefinierter irreduzibler analytischer Mengen, und es gilt $A = \bigcup \{ X_i : i \in I \}$. Damit und mit [RAMIS , Cor.2, p.82] beweist man wie im Endlichdimensionalen das RITTSche Lemma für endlichdefinierte analytische Mengen.

(C.19) RITTSches Lemma : Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit. A und Z seien analytische Mengen; A sei endlichdefiniert. Dann ist $\overline{A \rightarrow Z}$ analytisch in Ω .

Holomorphe Abbildungen . Wie üblich nennen wir eine Funktion auf einer analytischen Menge in einer Banachmannigfaltigkeit Ω holomorph, wenn sie lokal Spur einer auf einer offenen Teilmenge von Ω holomorphen Funktion ist. Eine stetige Abbildung zwischen analytischen Mengen X und Y heißt holomorph, wenn sie holomorphe Funktionen auf Y in holomorphe Funktionen auf X transportiert.

d) Einfache Fortsetzungssätze

E sei ein Banachraum und F ein folgenvollständiger lokalkonvexer Vektorraum.

(O.20) Erster RIEMANNscher Hebbarkeitssatz :

Ω sei ein Gebiet in E, A sei analytisch in Ω und von Ω verschieden. $f: \Omega \rightarrow A \rightarrow F$ sei holomorph und auf A lokal beschränkt d.h. jedes $x \in A$ besitze eine Umgebung V, derart daß $f(V \rightarrow A)$ beschränkt ist. Dann kann f holomorph auf Ω fortgesetzt werden.

Beweis: [RAMIS, p.24] oder wie folgt. Sei $b \in A$; o.E. kann man $b = 0$ annehmen. Wegen $A \neq \Omega$ gibt es eine Zerlegung $E = E_1 \oplus \mathbb{C}a$, so daß 0 in $A \cap \mathbb{C}a$ isoliert liegt. Daher kann man eine Nullumgebung U in E_1 und eine Kreisscheibe Δ in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 finden, derart daß $A \cap (U \times \text{Rd } \Delta)$ leer ist. Für $x \in U$ und $\lambda \in \Delta$ kann man deshalb definieren

$$g(x, \lambda a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(x, \xi a)}{\xi - \lambda} d\xi.$$

g ist holomorph auf $U \times \Delta a$ (die Stetigkeit folgt durch Nachrechnen oder aus (O.3)). Für $x \in U$ läßt sich f(x,) nach dem klassischen RIEMANNschen Hebbarkeitssatz fortsetzen auf Δa und stimmt dort mit $g(x,)$ überein. q.e.d.

Der einfachste HARTOGSSche Kontinuitätssatz läßt sich wie im Endlichdimensionalen beweisen.

(0.21) HARTOGSScher Kontinuitätssatz :

U sei ein Gebiet in E , $V \subset U$ sei offen und nicht leer. r_1 und r_2 seien positive reelle Zahlen, $r_1 < r_2$. Jede holomorphe Abbildung $f: (U \times A(0; r_1, r_2)) \cup (V \times \Delta(0, r_2)) \longrightarrow F$ läßt sich holomorph auf $U \times \Delta(0, r_2)$ fortsetzen.

Beweis:

$$g(x, \lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x, \xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \text{ wobei die Integra-}$$

tion über eine positiv orientierte Kreislinie $|\xi| = r_3$ mit $r_1 < r_3 < r_2$ ausgeführt wird. g ist auf $U \times \Delta(0, r_3)$ holomorph und stimmt mit f in $V \times \Delta(0, r_3)$, also auch in $U \times A(0; r_1, r_3)$ überein. q.e.d.

(0.22) Korollar : $E = \phi a \oplus \phi b \oplus E_1$ sei eine direkte Zerlegung, $a \neq 0 \neq b$. W sei ein Gebiet in E_1 ; r_1, r_2 und r seien positive reelle Zahlen, $r_1 < r_2$. $V = \Delta(0, r)$ sei offen und nicht leer. Jede holomorphe Abbildung f von

$[(A(0; r_1, r_2)a \oplus \Delta(0, r)b) \cup (\Delta(0, r_2)a \oplus Vb)] \oplus W$ nach F läßt sich holomorph auf $\Delta(0, r_2)a \oplus \Delta(0, r)b \oplus W$ fortsetzen.

Teil (i) des folgenden Satzes ist schon in [57, SOEDER] bewiesen.

(0.23) Satz : E_1 und E_2 seien Banachräume. $(w_k | k \in \mathbb{N})$ sei eine Nullfolge in E_2 ; $B := \overline{B}_{E_1}(0, r)$, $B_k := B \times \{w_k\}$, $B_0 := B \times \{0\}$. U sei eine Umgebung von $U\{B_k : k \in \mathbb{N}\} \cup (\text{Rd } B \times \{0\})$.

(i) Jede holomorphe Abbildung $f: U \longrightarrow F$ kann holomorph auf eine Umgebung von B_0 fortgesetzt werden.

(ii) Gibt es Kugeln U_1 in E_1 mit Mittelpunkt 0 und $(\text{Rd } B + U_1) \times U_2 \subset U$, so kann f auf eine Umgebung von $B \times U_2$ holomorph fortgesetzt werden.

Beweis: (i) Sei $z \in B$. $L := \{z\} \subset E_1$. $B \cap L$ ist eine Kreisscheibe in L . H sei ein topologischer Komplementärraum von L in E_1 . Weil $\text{Rd } B \cap L$ kompakt ist, gibt es eine Kreisscheibe Δ in L und Kugeln V in H und W in E_2 , alle mit Mittelpunkt 0 , so daß $(\text{Rd } B \cap L + \Delta) \times V \times W \subset U$; und es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $w_{k_0} \in W$. Wegen (0.20) läßt sich f holomorph auf $(B \cap L + \Delta) \times V \times W$ fortsetzen.

Auf diese Weise erhält man für jedes $z \in B_0$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf eine Umgebung von $B_0 \cap \{z\}$. Je zwei solche Fortsetzungen stimmen im gemeinsamen Definitionsbereich überein auf Grund des Identitätssatzes und der Konvergenz der B_k gegen B_0 . Man erhält daher eine holomorphe Fortsetzung von f auf B_0 .

(ii) Unabhängig von $z \in B$ kann man im Beweis zu (i) stets $W = U_2$ und Δ und V so wählen, daß $\Delta \times V \subset U_1$. Dann ist für jedes $z \in B$ die zugehörige Fortsetzung auf einer Umgebung von $(B \cap \{z\}) \times U_2$ in $E_1 \times E_2$ definiert. q.e.d.

(0.24) Korollar : E_1 und E_2 seien Banachräume . U sei ein Gebiet in E_2 , $V \subset U$ sei offen und nicht leer. r_1 und r_2 seien positive reelle Zahlen , $r_1 < r_2$. Jede holomorphe Abbildung f von $[(B_{E_1}(0, r_2) - B_{E_1}(0, r_1)) \times U] \cup [B_{E_1}(0, r_2) \times V]$ nach F läßt sich holomorph auf $B_{E_1}(0, r_2) \times U$ fortsetzen .

Beweis: Die Menge der Punkte $x \in U$, derart daß es in E_2 eine Kugel W um x und eine holomorphe Fortsetzung von f auf $B_{E_1}(0, r_2) \times W$ gibt, ist offen, nicht leer und wegen (0.23)(ii) abgeschlossen, also gleich U . Alle diese Fortsetzungen passen wegen des Identitätssatzes zusammen. q.e.d.

(0.25) Zweiter RIEMANNscher Hebbarkeitssatz :

Ω sei ein Gebiet in E , und $A \subset \Omega$ sei abgeschlossen in Ω . Zu jedem $x \in A$ gebe es einen komplexen zweidimensionalen affinen Unterraum H und (nach Wahl von Koordinaten in H) einen offenen Polyzylinder Q in $H \cap \Omega$ mit Zentrum x , so daß $A \cap Q$ kompakt ist. Dann läßt sich jede holomorphe Abbildung $f: \Omega \rightarrow F$ holomorph auf Ω fortsetzen.

Beweis: Sei $x \in A$; wähle H wie in der Voraussetzung. o.E. sei $x = 0$ und $E = E_1 \oplus H$ eine direkte Zerlegung. Weil A abgeschlossen ist , gibt es eine Nullumgebung W in E_1 und Polyzylinder $\bar{Q}_1 \subset Q_2$ mit Mittelpunkt 0 in $H \cap \Omega$, so daß $A \cap (W \oplus (Q_2 - \bar{Q}_1))$ leer ist . Wegen (0.22) kann f holomorph auf $W \oplus Q_2$ fortgesetzt werden. q.e.d.

(0.26) Korollar : Ω sei ein Gebiet in E , und A sei analytisch in Ω mit $\text{codim}_x A \geq 2$ in allen $x \in A$.
Dann läßt sich jede holomorphe Abbildung
 $f: \Omega \rightarrow A \longrightarrow F$ holomorph auf Ω fortsetzen .

Diese Aussage wird auch in [RAMIS , II.3.3.7.] bewiesen.

(0.27) HARTOGSScher Kugelsatz : Ω sei ein Gebiet in E ,
 B sei eine abgeschlossene beschränkte konvexe Menge in E . Es sei $B \subset \Omega$ und $\dim E \geq 2$. Dann
läßt sich jede holomorphe Abbildung $f: \Omega \rightarrow B \longrightarrow F$
holomorph auf Ω fortsetzen .

Beweis: Sei zunächst $F = \mathbb{C}$. Ist H ein endlichdimensionaler komplexer affiner Teilraum von E , so ist $B \cap H$ kompakt und konvex . Ω_H sei die Zusammenhangskomponente von $\Omega \cap H$, die $B \cap H$ enthält . Dann ist $\Omega_H \rightarrow (B \cap H)$ zusammenhängend (siehe z.B.[1, p.48]). Ist $\dim H \geq 2$, so kann man f nach dem klassischen Kugelsatz von $\Omega_H \rightarrow (B \cap H)$ holomorph auf Ω_H fortsetzen . Läßt man H variieren , so erhält man eine G -analytische Fortsetzung von f auf Ω , die nach (0.2) sogar holomorph ist .

Sei nun F beliebig (folgenvollständig , lokalkonvex). Wie eben gezeigt, hat $\mu \circ f$ für alle $\mu \in F'$ eine holomorphe Fortsetzung h_μ auf Ω . H sei ein eindimensionaler affiner Teilraum von E , o.E. $E = \mathbb{C}a$. Dann wird durch

$$g_H(\lambda a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi a)}{\xi - \lambda} d\xi$$

für eine geeignete $B \cap H$ und λa einfach umlaufende geschlossene Jordankurve Γ in $\Omega_H \rightarrow B$ eine holomorphe Abbildung auf Ω_H definiert. Nun kann auch jedes h_μ durch eine entsprechende Cauchyformel ausgedrückt werden, und es folgt $h_\mu = \mu \circ g_H$, also insbesondere auf $\Omega_H \rightarrow B$ $\mu \circ f = h_\mu = \mu \circ g_H$. weil dies für alle $\mu \in F'$ richtig ist, gilt auf $\Omega_H \rightarrow B$ $f = g_H$. Durchläuft H alle zu $\mathbb{C}a$ parallelen Teilräume, so wird durch die g_H eine Fortsetzung $g: \Omega \rightarrow F$ von f definiert. Für jedes $\mu \in F'$ stimmt $\mu \circ g$ mit h_μ überein, ist also holomorph. g ist daher schwach holomorph. Weil E metrisierbar ist, ist g sogar holomorph. q.e.d.

Eine allgemeinere Form des Kugelsatzes (ohne die Bedingung, daß B konvex ist), wird in [ALEXANDER, p.48] bewiesen.

Kapitel 1 Charakterisierung der Holomorphie und
Meromorphie von Abbildungen durch Ei-
genschaften ihrer Graphen

Eine Abbildung $f: E \longrightarrow F$ zwischen zwei Banachräumen ist bekanntlich genau dann holomorph, wenn ihr Graph G eine analytische Untermannigfaltigkeit von $E \times F$ ist und wenn für alle $z \in G$ der Tangentialraum $T_z G$ an G in z ein direktes Komplement zu F in $E \times F$ ist (siehe z.B. [11, BOURBAKI]). Nach [44, REMMERT, Satz 31] ist eine Abbildung eines normalen komplexen Raumes X in einen reduzierten komplexen Raum Y genau dann holomorph, wenn ihr Graph ein mit X gleichdimensionaler komplexer Unterraum von $X \times Y$ ist. Der Beweis beruht auf der lokalen Parametrisierung analytischer Mengen und der Gültigkeit des ersten RIEMANNschen Hebbarkeitssatzes auf normalen komplexen Räumen. Beide Aussagen haben wir in Spezialfällen auch in Banachräumen zur Verfügung, nämlich (0.16) und (0.20).

E ist im Folgenden immer ein Banachraum.

(1.1) Satz : Ω sei ein Gebiet in E ; $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sei eine Abbildung. f ist genau dann holomorph, wenn der Graph von f analytisch in $\Omega \times \mathbb{C}^n$ ist und $\text{codim}_z G = n$ in allen Punkten $z \in G$.

Beweis: Weil die Kodimension von G konstant und damit be-

schränkt ist, ist G endlichdefiniert. Für jedes $x \in \Omega$ besteht $(\{x\} \times \mathbb{C}^n) \cap G$ aus einem Punkt; deshalb ist nach (0.16) G lokal eine verzweigte analytische Überlagerung von E . f ist also stetig und außerhalb einer analytischen Menge holomorph. Mit (0.20) folgt die Holomorphie von f auf ganz Ω . q.e.d.

Dieser Satz läßt sich natürlich sehr einfach auf Abbildungen mit Werten in einem reduzierten komplexen Raum X übertragen. Dazu müssen wir nur definieren, was die Kodimension von G in $\Omega \times X$ sein soll. Sei $z = (u, x) \in G$. Indem man eine Umgebung W von x bezüglich X als analytische Menge in ein Gebiet U eines $\mathbb{C}^n$ einbettet, kann man $G \cap (\Omega \times W)$ als analytische Menge in $\Omega \times U$ auffassen. Wir definieren nun $\text{codim}_z^{\Omega \times X} G := \text{codim}_z^{\Omega \times U} G \cap (\Omega \times W) - \text{codim}_x^U W$. Diese Definition ist wegen [RAMIS, II.3.1.1.] unabhängig von der gewählten Einbettung und stimmt im Endlichdimensionalen mit der üblichen überein. Sie ermöglicht, den Beweis von (1.1) unmittelbar zu übertragen. Wir erhalten deshalb folgenden Satz.

(1.2) Satz: Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit, und X sei ein reduzierter komplexer Raum. Eine Abbildung $f: \Omega \longrightarrow X$ ist genau dann holomorph, wenn ihr Graph G analytisch in $\Omega \times X$ ist und $\text{codim}_{(u,x)}^{\Omega \times X} G = \dim_x X$ für alle $(u, x) \in G$.

Setzt man die Stetigkeit der betrachteten Abbildung vor-

aus , so kann man unmittelbar das REMMERTsche Ergebnis im Endlichdimensionalen anwenden .

(1.3) Satz : Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit , und X sei ein reduzierter komplexer Raum . Eine stetige Abbildung $f: \Omega \longrightarrow X$ ist genau dann holomorph , wenn ihr Graph analytisch in $\Omega \times X$ ist .

Beweis: o.E. seien Ω ein Gebiet in E und X eine analytische Menge in einem Gebiet des $\mathbb{C}^n$. Die Holomorphie von f auf jeder affinen Geraden folgt aus REMMERTs Resultat, also ist f G -analytisch und somit wegen der Stetigkeit holomorph . q.e.d.

Es stellt sich die Frage , ob die obigen Aussagen richtig bleiben , wenn der Bildraum X durch einen Banachraum F ersetzt wird . Vermeidet man die Schwierigkeit , wie eine Dimensionsforderung an den Graphen geeignet zu formulieren ist , indem man einfach die Abbildung als stetig voraussetzt (der Graph ist dann eine topologische Untermannigfaltigkeit und vermöge der Projektion homöomorph zu Ω), so reduziert sich die Frage auf folgendes Problem :

$f: \mathbb{C} \longrightarrow F$ sei eine stetige Abbildung in einen Banachraum F . Ist f holomorph , wenn der Graph von f analytisch ist ?

Wie im Abschnitt a) von Kapitel 0 erwähnt ist eine Abbildung $f: \mathbb{C} \longrightarrow F$ genau dann holomorph , wenn sie schwach holomorph ist d.h. wenn $\mu \circ f$ holomorph ist für

alle $\mu \in F'$. Offensichtlich läßt sich die schwache Holomorphie dadurch charakterisieren , daß $\kappa \circ f$ holomorph ist für alle stetigen Projektionen $\kappa: F \longrightarrow L$ auf eindimensionale komplexe Teilräume L von F . Weil der Graph von $\kappa \circ f$ gerade $(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \kappa)(\text{Graph von } f)$ ist , kann man nun mit Hilfe von Satz (1.3) unser obiges Problem umformulieren :

$f: \mathbb{C} \longrightarrow F$ sei eine stetige Abbildung in einen Banachraum F , deren Graph G analytisch ist . Ist dann $(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \kappa)(G)$ analytisch für jede stetige Projektion $\kappa: F \longrightarrow L$ auf einen eindimensionalen komplexen linearen Teilraum L von F ?

Weil die Restriktion von $\text{id}_{\mathbb{C}} \times \kappa$ auf G eigentlich, ja sogar topologisch ist , wäre das Problem gelöst , wenn man wüßte , daß der REMMERTsche Abbildungssatz auch im Unendlichdimensionalen gilt . Außer (0.14) und (0.18) sind mir jedoch keine derartigen Aussagen bekannt .

Sehr viele Schwierigkeiten bei der Untersuchung obiger Probleme rühren daher, daß es für analytische Mengen in Banachräumen nicht immer eine lokale Beschreibung in der Art von (0.16) gibt , daß man also insbesondere keine allgemein gültigen Aussagen darüber machen kann , wie viele reguläre Punkte eine analytische Menge enthält . Es gibt sogar Beispiele kompakter , nicht diskreter analytischer Mengen in Banachräumen , die nur aus singulären Punkten bestehen (obwohl sie reduziert sind) (siehe [20, DOUADY ; 42, RAMIS , p.33]).

Setzt man voraus ,daß der Graph einer lokalbeschränkten Abbildung $f: E \longrightarrow F$ zwischen zwei Banachräumen E und F genügend viele reguläre Punkte besitzt , genauer daß er eine Modifikation von E ist , so kann man mit Hilfe des ersten RIEMANNschen Hebbarkeitssatzes auf die Holomorphie von f schließen . Im Hinblick auf die Untersuchung meromorpher Abbildungen wollen wir diese Überlegungen gleich etwas allgemeiner durchführen und uns der Sprechweise der Korrespondenzen bedienen , wie sie etwa in [59 , STEIN] eingeführt ist .

Eine Korrespondenz von einer Menge X in eine Menge Y ist ein Tripel (X,G,Y) , wobei G eine Teilmenge von $X \times Y$ ist , die als Graph der Korrespondenz bezeichnet wird . Jede Abbildung ist eine Korrespondenz , und jede Korrespondenz von X nach Y definiert vermöge $k(x) := \{y \in Y : (x,y) \in G\}$ eine Abbildung von X in die Potenzmenge von Y . Wir bezeichnen daher Korrespondenzen meist mit $k: X \longrightarrow Y$ und ihren Graphen mit G_k oder auch einfach mit G . Mit $\check{k}: G \longrightarrow X$ und $\hat{k}: G \longrightarrow Y$ bezeichnen wir die kanonischen Projektionen , und für $Z \subset X$ setzen wir $k(Z) := \hat{k}(\check{k}^{-1}(Z))$. Ist $W \subset X$, so sei $k|_W$ diejenige Korrespondenz von W nach Y , deren Graph $G_k \cap (W \times Y)$ ist . Sind X und Y Banachmannigfaltigkeiten oder komplexe Räume , so verstehen wir unter einer a -holomorphen Korrespondenz $k: X \longrightarrow Y$ eine Korrespondenz , deren Graph eine analytische Teilmenge von $X \times Y$ ist (siehe Kapitel 0 , Abschnitt c)) .

Wir können nun die angekündigte Aussage formulieren. Im Endlichdimensionalen besagt sie nichts anderes, als daß jede meromorphe Abbildung von einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit in einen $\mathbb{C}^n$ schon holomorph ist.

(1.4) Satz : Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit, F sei ein Banachraum, und $k: \Omega \rightarrow F$ sei eine a -holomorphe Korrespondenz. Für jede kompakte Teilmenge $C \subset \Omega$ sei $k(C)$ beschränkt, und die Projektion $\check{k}$ des Graphen G von k nach Ω sei eine Modifikation, d.h. es gebe eine analytische Menge A in Ω , so daß $N := \check{k}^{-1}(A)$ in G nirgends dicht und $\check{k}: G \setminus N \rightarrow \Omega \setminus A$ biholomorph ist. Dann ist $\check{k}$ biholomorph und k eine holomorphe Abbildung.

Beweis: Zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U , so daß $k(U)$ beschränkt ist; denn wäre dies nicht richtig, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \Omega$ und ein $y_n \in k(x_n)$, so daß $x_n \rightarrow x$ und $\|y_n\| > n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist g die Umkehrabbildung von $\check{k}|_{G \setminus N} \rightarrow \Omega \setminus A$, so ist also $\hat{k} \circ g$ lokal beschränkt auf A und läßt sich nach (0.20) zu einer holomorphen Abbildung $f: \Omega \rightarrow F$ fortsetzen. Weil $\check{k}^{-1}(\Omega \setminus A)$ in G dicht ist, stimmt der Graph von f mit G überein.

q.e.d.

Wir führen noch einen ähnlichen Satz an, der sich weiter unten als nützlich erweisen wird.

(1.5) Satz : Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit, und

$k: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sei eine a -holomorphe Korrespondenz .
 $k(C)$ sei beschränkt , wenn $C \subset \Omega$ kompakt ist . Für
jedes $x \in \Omega$ bestehe $k(x)$ aus endlich vielen Punkten ,
und für alle Punkte x in einer offenen und dichten
Teilmenge D von Ω sei $k(x)$ sogar einpunktig . Außer-
dem sei der Graph G von k der Abschluß von $G \cap (D \times \mathbb{C}^n)$.
Dann ist k eine holomorphe Abbildung .

Beweis: Wie im Beweis von (1.4) zeigt man , daß es zu je-
dem $x \in \Omega$ eine Umgebung U von x und einen relativ kompakten
Polyzylinder $Q \subset \mathbb{C}^n$ gibt , so daß $G \cap (U \times \mathbb{C}^n) \subset U \times Q$. Man
sieht leicht , daß $\check{k}(G \cap (U \times \mathbb{C}^n)) = U$. Mit (0.14) folgt
daraus $\text{codim}_{\mathbb{Z}} G = n$ für alle $z \in G \cap ((D \cap U) \times \mathbb{C}^n)$. Nach (1.1)
ist G über $U \cap D$ Graph einer holomorphen Funktion , besteht
dort also nur aus regulären Punkten . Auf Grund der in Ka-
pitel 0 erwähnten Eigenschaften der Kodimension muß
 $\text{codim}_{\mathbb{Z}} G = n$ für alle $z \in G \cap (U \times \mathbb{C}^n)$ sein , denn $G \cap (D \times \mathbb{C}^n)$
ist dicht in G . Folglich ist $G \cap (U \times \mathbb{C}^n)$ endlichdefiniert
und deshalb nach (0.16) lokal eine verzweigte analytische
Überlagerung von U , die einblättrig sein muß , weil D
dicht liegt . Mit Hilfe des ersten RIEMANNschen Hebbar-
keitssatzes (0.20) folgt , daß G über U der Graph einer
holomorphen Abbildung ist . q.e.d.

Meromorphe Funktionen . Die Halme $\mathcal{O}_{\Omega, x}$ der Garbe $\mathcal{O}_{\Omega}$ der holomorphen Funktionen auf einer Banachmannigfaltigkeit Ω sind lokale Integritätsringe mit dem maximalen Ideal $\{f_x \in \mathcal{O}_{\Omega, x} : f_x(x) = 0\}$. Daher kann man in der gewohnten Weise die Garbe $\mathbb{M}_{\Omega}$ bilden , deren Halme die Quotientenkörper der Halme von $\mathcal{O}_{\Omega}$ sind . Die stetigen Schnitte von $\mathbb{M}_{\Omega}$ über einer offenen Menge U werden meromorphe Funktionen auf U genannt . Weil der espace étalé von $\mathbb{M}_{\Omega}$ Hausdorffsch ist , genügen die meromorphen Funktionen dem Identitätssatz .

Wie üblich definieren wir für jede meromorphe Funktion $m \in \mathbb{M}_{\Omega}(U)$:

Menge der Singularitäten von m

$$S(m) := \{x \in U : m_x \notin \mathcal{O}_{\Omega, x}\}$$

Menge der Polstellen von m

$$P(m) := \{x \in S(m) : m_x^{-1} \in \mathcal{O}_{\Omega, x}\}$$

Menge der Unbestimmtheitsstellen von m

$$I(m) := \{x \in S(m) : m_x^{-1} \notin \mathcal{O}_{\Omega, x}\} = S(m) - P(m) .$$

Weil $\mathcal{O}_{\Omega, x}$ für jedes $x \in \Omega$ ein faktorieller Ring ist (siehe [42, RAMIS , I.1.4.4.]) , kann man jeden meromorphen Funktionskeim m_x in der Form $\frac{f_x}{g_x}$ mit teilerfremden Keimen $f_x, g_x \in \mathcal{O}_{\Omega, x}$ darstellen und erhält dann folgende Charakterisierung :

$x \in S(m)$ genau dann , wenn $g_x(x) = 0$.

$x \in P(m)$ genau dann , wenn $f_x(x) \neq 0$ und $g_x(x) = 0$.

$x \in I(m)$ genau dann , wenn $f_x(x) = 0$ und $g_x(x) = 0$.

Wie in [29 , HÖRMANDER , 6.2.3] beweist man folgendes Lemma .

(1.6) Lemma : f und g seien holomorphe Funktionen in einer Nullumgebung des Banachraumes E . Die Keime f_0 und g_0 seien teilerfremd in $\mathcal{O}_{E,0}$. Dann gilt :

- a) Es gibt eine Nullumgebung U , derart daß die Keime f_z und g_z für jedes $z \in U$ teilerfremd sind .
- b) Ist $f(0) = 0 = g(0)$, so gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ in jeder Nullumgebung ein z mit $g(z) \neq 0$ und $\frac{f(z)}{g(z)} = \lambda$.

Mit Hilfe von [21 , FIELD , Th. 1] läßt sich beweisen , daß $a, b \in \mathcal{O}_{E,0}$ genau dann teilerfremd sind , wenn es einen endlichdimensionalen Teilraum F von E gibt , so daß $a|_F$ und $b|_F$ in $\mathcal{O}_{F,0}$ teilerfremd sind . Damit kann man Teil b) von (1.6) auf die entsprechende Aussage im Endlichdimensionalen zurückführen .

Aus (1.6)a) ergibt sich sofort , daß für jede meromorphe Funktion m auf einer Banachmannigfaltigkeit $S(m)$ und $I(m)$ analytische Mengen sind . $I(m)$ hat in allen Punkten die Kodimension zwei (siehe [42 , RAMIS , II.1.2.5., II.3.3.6.]); $S(m)$ ist natürlich einskodimensional .

Für jede meromorphe Funktion m auf einer Banachmannigfaltigkeit Ω ist $D(m) := \Omega - S(m)$ eine nichtleere , offene und lokal zusammenhängende Menge . m definiert auf $D(m)$ eine holomorphe Funktion $\tilde{m}$. Wegen des Identitätssatzes für meromorphe Funktionen ist m durch $\tilde{m}$ eindeutig bestimmt .

Umgekehrt gibt es zu einer holomorphen Funktion h auf einer offenen und dichten Teilmenge D von Ω eine meromorphe Funktion m mit $\tilde{m}|D = h$, wenn zu jedem $x \in \Omega$ eine zusammenhängende Umgebung U von x und holomorphe Funktionen f und g auf U existieren mit $g \neq 0$ und $h(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ für alle $y \in U \cap D \cap \{g \neq 0\}$.

Ob ein Punkt Polstelle oder Unbestimmtheitsstelle einer meromorphen Funktion m ist, läßt sich in bekannter Weise durch das Verhalten von $\tilde{m}$ charakterisieren.

(1.7) Satz : Es gilt

- a) $x \in P(m)$ genau dann, wenn $\tilde{m}(x_n) \rightarrow \infty$ für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D(m)$.
- b) $x \in I(m)$ genau dann, wenn $\tilde{m}(U \cap D(m)) = \emptyset$ für jede Umgebung U von x .
- c) $x \in I(m)$ genau dann, wenn es zwei gegen x konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D(m)$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}(y_n)$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen und (1.5)b).

Obiger Satz legt nahe, eine meromorphe Funktion m auf einer Banachmannigfaltigkeit Ω wie im Endlichdimensionalen als Korrespondenz $k: \Omega \rightarrow \mathbb{P}$ in die RIEMANNsche Zahlenkugel $\mathbb{P}$ aufzufassen, indem man $k|D(m) := \tilde{m}$, $k(x) := \infty$ für $x \in P(m)$ und $k(x) := \mathbb{P}$ für $x \in I(m)$ setzt. Den Graphen G von k bezeichnen wir auch als Graphen von m . G ist der Abschluß des Graphen von $\tilde{m}$ in $\Omega \times \mathbb{P}$. m ist selbst-

verständlich durch k eindeutig bestimmt, da m dies schon durch die in k enthaltene Funktion $\tilde{m}$ ist. Diejenigen Korrespondenzen von Ω nach $\mathbb{P}$, die auf die eben beschriebene Weise einer meromorphen Funktion zugeordnet sind, zeichnen sich wie im Endlichdimensionalen dadurch aus, daß ihr Graph eine (eigentliche) Modifikation von Ω ist. Wir wollen dies ein kleines bißchen allgemeiner fassen.

$m_1, \dots, m_n$ seien meromorphe Funktionen auf einer Banachmannigfaltigkeit Ω . $S := \bigcup \{S(m_i) : i = 1, \dots, n\}$. Die $\tilde{m}_i$ definieren eine holomorphe Abbildung $\tilde{m} : \Omega - S \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Faßt man die m_i als Korrespondenz $\Omega \longrightarrow \mathbb{P}$ auf, so kann man ihre Verbindung $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}^n$ im Sinne der Korrespondenzentheorie bilden, die durch $k(x) := m_1(x) \times \dots \times m_n(x)$ gegeben wird. Sie enthält die holomorphe Abbildung $\tilde{m}$. Orientiert man sich am Fall einer einzigen meromorphen Funktion, so erscheint es natürlicher, diejenige Korrespondenz $m : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}^n$ als Verbindung der m_i zu bezeichnen, deren Graph der Abschluß des Graphen von $\tilde{m}$ in $\Omega \times \mathbb{P}^n$ ist. m ist im Endlichdimensionalen als meromorphe Verbindung der m_i bekannt. Offensichtlich kann man die meromorphe Verbindung auch definieren, wenn einige der m_i nicht meromorph sondern identisch ∞ sind. Wie im Endlichdimensionalen [44, REMMERT; 60, WHITNEY] kann man die Korrespondenzen $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}^n$, die meromorphe Verbindung von meromorphen Funktionen oder identisch unendlichen Abbildungen sind, dadurch charakterisieren, daß $\check{k} : G_k \longrightarrow \Omega$ eine eigentliche Modifikation ist.

(1.8) Satz : m sei die meromorphe Verbindung der meromorphen Funktionen $m_1, \dots, m_n$ auf der Banachmannigfaltigkeit Ω . G sei ihr Graph. Dann gilt :

- a) G ist analytisch in $\Omega \times \mathbb{P}^n$.
- b) $\tilde{m}: G \longrightarrow \Omega$ ist holomorph, surjektiv und eigentlich (das soll heißen, daß das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist).
- c) $\tilde{m}|_{G - \tilde{m}^{-1}(S)} \longrightarrow \Omega - S$ ist biholomorph, wobei $S := \bigcup \{ S(m_i) : i = 1, \dots, n \}$.

Beweis: Zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U_x , in der sich jedes m_i als Quotient $\frac{f_i}{g_i}$ zweier holomorpher Funktionen schreiben läßt, deren Keime in jedem Punkt von U_x teilerfremd sind. Durch die Funktionen

$$(z, ([\alpha_1: \beta_1], \dots, [\alpha_n: \beta_n])) \longrightarrow f_i(z) \beta_i - g_i(z) \alpha_i$$

$i = 1, \dots, n$

wird in $U_x \times \mathbb{P}^n$ eine analytische Menge A_x definiert. Sind $x, y \in \Omega$, so stimmen A_x und A_y in $(U_x \cap U_y) \times \mathbb{P}^n$ überein, weil f_i und g_i teilerfremd gewählt waren. Deshalb ist

$A := \bigcup \{ A_x : x \in \Omega \}$ eine analytische Menge in $\Omega \times \mathbb{P}^n$.

Nach (0.19) ist der Abschluß Y von $A - (S \times \mathbb{P}^n)$ in $\Omega \times \mathbb{P}^n$ analytisch. Weil $A - (S \times \mathbb{P}^n)$ der Graph von $\tilde{m}$ ist, gilt $Y = G$ und damit ist a) bewiesen.

Die Projektion $\tilde{m}$ ist offensichtlich holomorph und eigentlich. Weil das Bild einer eigentlichen Abbildung abgeschlossen ist und $\tilde{m}(G)$ die dichte Menge $\Omega - S$ umfaßt, ist $\tilde{m}$ surjektiv. c) ist richtig, weil $G - \tilde{m}^{-1}(S)$ der Graph der holomorphen Abbildung $\tilde{m}$ ist. q.e.d.

Die Umkehrung von (1.8) zeigen wir zunächst für $n=1$.

(1.9) Satz : Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit , und
 $k: \Omega \rightarrow \mathbb{P}$ sei eine a -holomorphe Korrespondenz .
 Es gebe eine offene und dichte Teilmenge D von Ω ,
 so daß $k|_D$ eine $\mathbb{C}$ -wertige Abbildung ist . Der
 Graph G von k sei der Abschluß von $G \cap (D \times \mathbb{P})$.
 Dann ist k eine meromorphe Funktion .

Beweis: (vgl. [60, WHITNEY , p.186 , 1P]).

$\pi: \Omega \times \mathbb{P} \rightarrow \Omega$ sei die kanonische Projektion . Es gilt
 $\pi(G) = \Omega$, weil D dicht und $\mathbb{P}$ kompakt ist .

$P := \pi(G \cap (\Omega \times \{\infty\}))$ ist analytisch in Ω . Die Restriktion
 $k|_{\Omega \rightarrow P} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die Voraussetzungen von (1.5) ;
 folglich ist $k|_{\Omega \rightarrow P}$ eine holomorphe Funktion . Wir wollen
 zeigen , daß sie in allen Punkten von P meromorph ist .

Sei $w \in P$. Es gibt Umgebungen W von w und $V := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R\} \cup \{\infty\}$ von ∞ ($R \geq 1$) sowie eine holomorphe
 Abbildung $g: W \times V \rightarrow F$ in einen Banachraum F , so daß
 $G \cap (W \times V) = g^{-1}(0)$. Weil $G \cap (\Omega \times \{\infty\})$ eine echte analytische
 Teilmenge von $\Omega \times \{\infty\}$ ist , ist g auf $W \times \{\infty\}$ nicht
 identisch 0 , und es gibt ein $\mu \in F'$, so daß
 $\mu \circ g|_{G \cap (W \times V)} = 0$ aber $\mu \circ g|_{W \times \{\infty\}} \neq 0$.

Durch Verkleinerung von W und Vergrößerung von R läßt
 sich erreichen , daß für alle $x \in W$ und $|\lambda| < \frac{1}{R}$

$$|\tilde{\psi}(x, \lambda)| < N \quad \text{und} \quad |\tilde{\psi}(x, \lambda) - \tilde{\psi}(x, 0)| < N |\lambda| ,$$

wobei $\tilde{\psi}(x, \lambda) := \mu \circ g(x, \lambda^{-1})$ und $N \in \mathbb{N}$ geeignet .

Wir setzen $\psi(x) := \tilde{\psi}(x, 0)$ für $x \in W$ und $\phi(x) := \psi(x) k(x)$

für $x \in W \rightarrow P$. Dann gilt $|\Phi(x)| \leq NR$ für alle $x \in W \rightarrow P$.
Ist nämlich $|k(x)| \leq R$, so gilt die Ungleichung trivialerweise. Ist $|k(x)| > R$, so ist $(x, k(x)) \in G \cap (W \times V)$ und somit $\tilde{\Psi}(x, \frac{1}{k(x)}) = 0$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &= |-\Psi(x)k(x)| = \frac{1}{|k(x)|} |0 - \tilde{\Psi}(x, 0)| = \\ &= \frac{1}{|k(x)|} |\tilde{\Psi}(x, \frac{1}{k(x)}) - \tilde{\Psi}(x, 0)| < N \leq NR. \end{aligned}$$

Φ ist also auf $W \rightarrow P$ beschränkt und deshalb nach (0.20) auf W holomorph fortsetzbar; und in $W \rightarrow P$ gilt $k = \frac{\Phi}{\Psi}$.
Damit ist gezeigt, daß die holomorphe Funktion $k|_{\Omega \rightarrow P}$ eine meromorphe Funktion auf Ω definiert, deren Graph gerade G ist, denn G ist nach Voraussetzung der Abschluß des Graphen von $k|_D$, also insbesondere auch der Abschluß des Graphen von $k|_{\Omega \rightarrow P}$. q.e.d.

(1.10) Korollar: Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit, und $k: \Omega \rightarrow \mathbb{P}$ sei eine a -holomorphe Korrespondenz. Ist $\check{k}: G \rightarrow \Omega$ eine Modifikation, so ist k eine meromorphe Funktion oder identisch ∞ .

(1.11) Satz: Ω sei eine Banachmannigfaltigkeit, und $k: \Omega \rightarrow \mathbb{P}^n$ sei eine a -holomorphe Korrespondenz. Ist $\check{k}: G \rightarrow \Omega$ eine Modifikation, so ist k die meromorphe Verbindung von n Funktionen, die meromorph oder identisch ∞ sind.

Beweis: Es gibt eine offene dichte Menge $D \subset \Omega$, über der $\check{k}$ biholomorph ist. $\check{k}^{-1}(D)$ ist deshalb eine direkte komplexe Untermannigfaltigkeit von $\Omega \times \mathbb{P}^n$ der Kodimension n . Weil $\check{k}^{-1}(D)$ in G dicht liegt, hat G in allen Punkten die Kodimension n . $\pi_j: \Omega \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \Omega \times \mathbb{P}$ sei das Produkt der Identität auf Ω mit der Projektion auf die j -te Koordinate. π_j ist epidermisch und die Beschränkung auf G ist eigentlich^{*)}. Deshalb ist nach (0.18) $\pi_j(G)$ analytisch in $\Omega \times \mathbb{P}$. Außerdem ist die Projektion $\pi_j(G) \longrightarrow \Omega$ eine Modifikation. Daraus folgt mit (1.10) die Behauptung.

q.e.d.

^{*)} auch in dem Sinne von universell abgeschlossen; dies folgt z.B. aus [10, BOURBAKI, Chap.I, §10.2, Cor.5].

Kapitel 2

Kontinuitätssätze für pseudokonvexe Gebiete

Unter einem Kontinuitätssatz versteht man üblicherweise eine Aussage darüber, wann alle holomorphen oder alle meromorphen Funktionen auf einem Gebiet Ω_1 auf ein Gebiet Ω_2 fortgesetzt werden können. Die allgemeinste Aussage dieser Art ist natürlich die, daß das größtmögliche Gebiet Ω_2 , auf das man holomorph bzw. meromorph fortsetzen kann, die Holomorphie- bzw. Meromorphiehülle von Ω_1 ist. Weil man diese in konkreten Fällen meist nicht sehr genau beschreiben kann, versucht man, für spezielle geometrische Konfigurationen Kontinuitätssätze zu beweisen, mit deren Hilfe wenigstens einige Teilmengen der Hülle explizit angegeben werden können. Dabei ist es beweistechnisch oft günstig, eine andere Formulierung des Problems zu wählen: $(\mathfrak{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von "Flächen", die in einem gewissen Sinne gegen eine "Fläche" $\mathfrak{F}$ konvergiere, und $\mathcal{R}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{F}$. Unter welchen Voraussetzungen sind alle holomorphen oder meromorphen Funktionen auf $\mathcal{R} \cup \{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$ holomorph bzw. meromorph nach $\mathfrak{F}$ fortsetzbar? Wir werden zunächst den Fall betrachten, daß $\mathcal{R}$ "Rand der Fläche $\mathfrak{F}$ " ist; gegen Ende des Kapitels werden wir jedoch zeigen, daß es in manchen Fällen genügt, wenn $\mathcal{R}$ nur ein Punkt von $\mathfrak{F}$ ist. Eine Präzisierung all dieser Begriffe wird sich in den folgenden Abschnitten ergeben.

Ein Kontinuitätssatz der eben beschriebenen Art wurde 1936 von H.BEHNKE in [4] für holomorphe Funktionen bewiesen. Dabei sind die $\mathfrak{F}_i$ sowie $\mathfrak{F}$ die abgeschlossenen Hüllen relativ kompakter Gebiete auf analytischen Mengen im $\mathbb{C}^n$; die Konvergenz der $\mathfrak{F}_i$ gegen $\mathfrak{F}$ ist in [4] nicht genauer erklärt, aus [6 , BEHNKE-STEIN] ist jedoch ersichtlich, daß die $\mathfrak{F}_i$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{F}$ und auch die Ränder $\mathfrak{R}_i$ der $\mathfrak{F}_i$ gleichmäßig gegen den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$ konvergieren sollen. In [4] wird der Satz nur für holomorphe Funktionen f ausgesprochen, die die folgende Eigenschaft besitzen :

(*) Es gibt eine Umgebung U von $\mathfrak{F}$, so daß jede holomorphe Fortsetzung von f innerhalb von U eindeutig bleibt.

Um auf die von uns verwendete Beweismethode hinzuführen, wollen wir BEHNKES Beweisidee kurz wiedergeben, allerdings in einer gegenüber [4] leicht modifizierten Form.

BEHNKE gab nicht unmittelbar die Fortsetzung einer auf $\mathfrak{R} \cup \cup \{ \mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N} \}$ holomorphen Funktion an, sondern folgerte aus der Holomorphiekonvexität des Existenzgebietes $p: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ von f , daß $\mathfrak{F}$ darin enthalten ist, d.h. daß es über $\mathfrak{F}$ einen stetigen Schnitt τ von p gibt, der mit dem von f induzierten Schnitt σ auf $\mathfrak{R}$ übereinstimmt. Er bewies also im Grunde genommen einen Kontinuitätssatz für stetige Schnitte von holomorphkonvexen Gebieten über dem $\mathbb{C}^n$.

Wir geben nun die wichtigsten Beweisschritte an.

1. Beweisschritt : $Z := \sigma(\cup \{ \mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N} \})$ ist relativ kompakt.

Beweis: Weil $\mathfrak{R}$ kompakt ist, kann man annehmen, σ sei auf einer kompakten Umgebung W von $\mathfrak{R}$ definiert. Weil die $\mathfrak{R}_i$ gleich-

mäßig gegen $\mathbb{R}$ konvergieren, gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbb{R}_i \subset W$ für $i > j$. Aus dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen folgt, daß $\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i > j\})$ in der holomorphkonvexen Hülle von $\sigma(W)$ liegt, die kompakt ist, weil Ω holomorphkonvex ist. Daraus ergibt sich, daß Z relativ kompakt ist.

2. Beweisschritt : Es gibt eine größte $\mathbb{R}$ umfassende Teilmenge M von $\mathfrak{F}$, derart daß es einen stetigen Schnitt τ von p über M mit $\tau|_{\mathbb{R}} = \sigma|_{\mathbb{R}}$ gibt. $\tau(M)$ besteht aus Berührungspunkten von Z .

Beweis: folgt aus der Bedingung (*).

3. Beweisschritt : $M = \mathfrak{F}$.

Beweis: Annahme: $M \neq \mathfrak{F}$. Weil Z relativ kompakt ist, gibt es dann einen Punkt $x \in M$, so daß $\tau(x)$ nicht in der holomorphkonvexen Hülle von Z liegt, und eine holomorphe Funktion h auf Ω mit $\|h\|_Z < |h(\tau(x))|$. Wegen 2. ist dies ein Widerspruch zur Stetigkeit von h .

Wir wollen zunächst den zweiten und dritten Beweisschritt untersuchen; die Überlegung, wie man den ersten Beweisschritt auf das Unendlichdimensionale übertragen kann, wollen wir noch etwas zurückstellen.

Zum dritten Beweisschritt ist lediglich anzumerken, daß es nicht nötig ist, auf die Holomorphiekonvexität zurückzugreifen; man kann ihn rein topologisch aus den beiden ersten herleiten (siehe Satz (2.2)).

Weil die Voraussetzung (*) eine unerwünschte Einschränkung ist, haben wir versucht, darauf zu verzichten und stattdes-

sen eine spezielle Konvergenz der $\mathfrak{F}_i$ gegen $\mathfrak{F}$ zu fordern, mit deren Hilfe der zweite Beweisschritt durchgeführt werden kann. Fortsetzungen analytischer Objekte auf zusammenhängende Mengen erhält man oft durch Zusammenkleben von Fortsetzungen längs kleinerer zusammenhängender Mengen, für die sich schon aus technischen Gründen Wege anbieten. Damit das Zusammenkleben möglich ist, genügt es, daß die Fortsetzung längs jedes Weges eindeutig bleibt. Um auf diese Weise im zweiten Beweisschritt die Menge M und den Schnitt τ konstruieren zu können, muß man die Fortsetzungen von σ längs Wegen in $\mathfrak{F}$ durch die Werte von σ auf den $\mathfrak{F}_i$ kontrollieren können. Man wird deshalb verlangen, daß sich jeder Weg in $\mathfrak{F}$ durch Wege in den $\mathfrak{F}_i$ gleichmäßig approximieren läßt. Wir treffen daher folgende Definition.

S und $S_i, i \in \mathbb{N}$, seien Teilmengen eines Banachraumes E .

Die Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen S , in Zeichen $S_i \rightarrow S$, wenn es zu jedem Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow S$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $\gamma_j: [0,1] \rightarrow S_j$ gibt, so daß $\|\gamma(t) - \gamma_j(t)\| < \epsilon$ für alle $t \in [0,1]$.

Die Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen S , in Zeichen $S_i \Rightarrow S$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $S_i \subset U_\epsilon(S)$ für alle $i \geq j$.

Einen anderen Konvergenzbegriff hat ROTHSTEIN in [46] zum Beweis eines Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen in Φ^n eingeführt. Er verlangt außer der gleichmäßigen Konvergenz der $\mathcal{R}_i$ gegen $\mathcal{R}$, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\mathfrak{F}$ für alle $i \geq j$ relativ kompakt in $U_\epsilon(\mathfrak{F}_i)$ liegt.

Wir wissen nicht, in welcher Beziehung unser erster Konvergenzbegriff zu dem von ROTHSTEIN verwendeten steht; aber er umfaßt jedenfalls die einfache Situation, daß die $\mathfrak{F}_i$ durch Parallelverschiebung aus $\mathfrak{F}$ entstehen, ebenso wie allgemeinere Situationen der folgenden Art (vgl. (2.13), (2.14), (2.16)).

(2.1) Lemma : B und T seien topologische Räume, und $\phi: B \times T \longrightarrow E$ sei eine topologische Abbildung in den Banachraum E . $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine gegen $t \in T$ konvergente Folge in T ; $\mathfrak{F} := \phi(B \times \{t\})$ und $\mathfrak{F}_i := \phi(B \times \{t_i\})$. Dann gilt $\mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}$.

Beweis: Es seien $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathfrak{F}$ ein Weg und $\epsilon > 0$. Weil der Träger des Weges $\mu = \phi^{-1} \circ \gamma$ kompakt ist, gibt es endlich viele $s_1, \dots, s_l \in [0,1]$, eine Umgebung V von t in T und Umgebungen $U_i \times V$ von $\mu(s_i)$, die den Träger von μ überdecken und $\phi(U_i \times V) \subset U_{\frac{1}{2}\epsilon}(\gamma(s_i))$ erfüllen. Weil der Träger von γ in $\mathfrak{F}$ liegt, hat μ die Gestalt $\mu(s) = (\gamma(s), t)$. Ist $t_i \in V$ und setzt man $\gamma_i(s) := \phi(\gamma(s), t_i)$, so gilt $\|\gamma(s) - \gamma_i(s)\| < \epsilon$ für alle $s \in [0,1]$. q.e.d.

Wir beweisen nun als erstes einen ziemlich technischen, aber für das Folgende fundamentalen Kontinuitätssatz, der rein topologischer Natur ist.

(2.2) Satz : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei eine Mannigfaltigkeit über E . $\mathfrak{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{F}$ seien wegzusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Mengen in E ;

$\mathcal{R}$ sei eine nicht leere Teilmenge von $\mathcal{F}$. Es gelte $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}$. σ sei ein stetiger Schnitt von p über $\mathcal{R} \cup \{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$, derart daß $d_{\Omega}(\sigma(\cup\{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\})) > 0$. Dann gibt es einen stetigen Schnitt $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \Omega$ von p mit $\sigma|_{\mathcal{R}} = \tau|_{\mathcal{R}}$.

Beweis: Wie schon oben angedeutet, werden wir τ dadurch konstruieren, daß wir σ von $\mathcal{R}$ aus längs Wegen nach $\mathcal{F}$ hinein fortsetzen. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit.

1) Behauptung : Z sei eine $\mathcal{R}$ umfassende Teilmenge von $\mathcal{F}$.

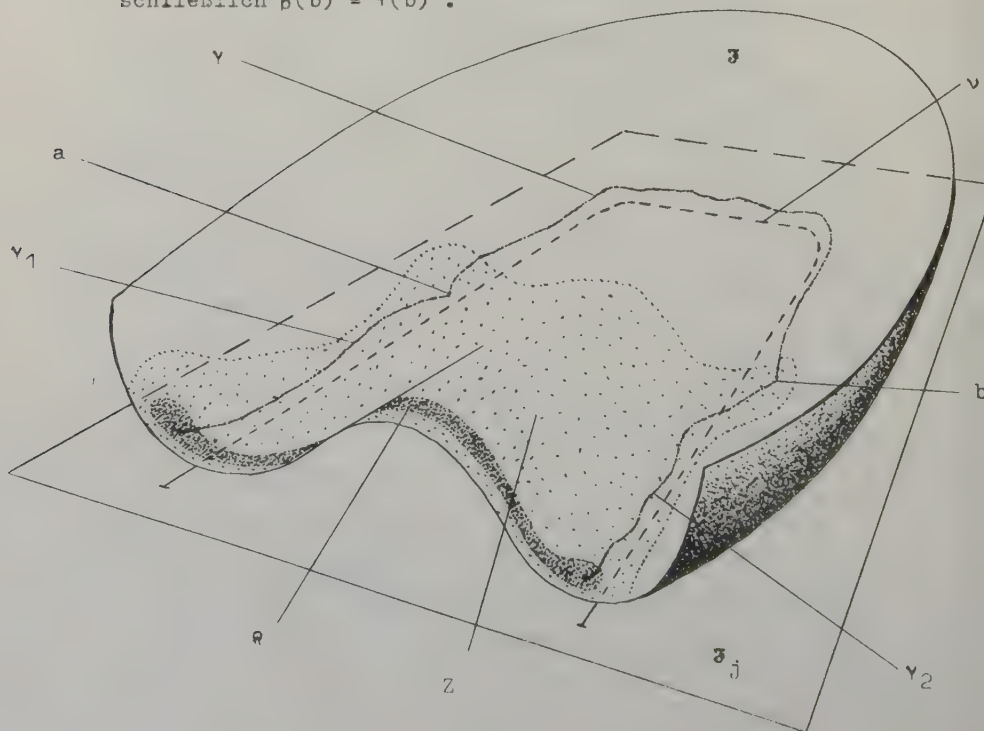
Jeder Punkt von Z lasse sich durch einen Weg in Z mit einem Punkt in $\mathcal{R}$ verbinden. τ sei ein stetiger Schnitt von p über Z mit $\tau|_{\mathcal{R}} = \sigma|_{\mathcal{R}}$.

$\gamma : [0,1] \rightarrow \mathcal{F}$ sei ein Weg mit $a := \gamma(0) \in Z$. Ist ρ ein stetiger Schnitt von p über $|\gamma| := \gamma([0,1])$ und $\rho(a) = \tau(a)$, so definieren ρ und τ einen stetigen Schnitt über $Z \cup |\gamma|$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß ρ und τ im gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Sei $b := \gamma(t_0) \in Z$, o.E. sei $t_0 = 1$. Es gibt Wege $\gamma_n : [0,1] \rightarrow Z$, $n=1,2$, mit $\gamma_n(0) \in \mathcal{R}$, $\gamma_1(1) = a$ und $\gamma_2(1) = b$. Der Weg $\mu : [0,3] \rightarrow \mathcal{F}$ sei wie folgt definiert

$$\mu(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [0,1] \\ \gamma(t-1) & \text{für } t \in [1,2] \\ \gamma_2(3-t) & \text{für } t \in [2,3] \end{cases}$$

Nach (0.6) gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß man annehmen kann, τ sei auf $U_\epsilon(|v_1| \cup |v_2|)$ und ρ auf $U_\epsilon(|v|)$ definiert. Auf Grund einer ähnlichen Schlußweise wie im Beweis von (0.6) kann man ϵ gleich so klein wählen, daß sich auch σ ausdehnen läßt auf $B(v_1(0), \epsilon)$ und auf $B(v_2(0), \epsilon)$. Wegen $\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $v: [0, 3] \rightarrow \mathfrak{F}_j$ mit $\|v(t) - u(t)\| < \epsilon$ für alle $t \in [0, 3]$. Aus $\tau(v_n(0)) = \sigma(v_n(0))$ für $n = 1, 2$ folgt nach dem Identitätssatz (0.4) $\tau(v(0)) = \sigma(v(0))$ und $\tau(v(3)) = \sigma(v(3))$. Deshalb stimmen τ und σ auf $v([0, 1])$ und auf $v([2, 3])$ überein. Wegen $\rho(a) = \tau(a)$ folgt daraus $\rho(v(1)) = \tau(v(1)) = \sigma(v(1))$; also stimmen ρ und σ auf $v([1, 2])$ überein. Daraus ergibt sich $\rho(v(2)) = \tau(v(2))$ und damit schließlich $\rho(b) = \tau(b)$.



2) M sei die Menge aller Punkte in $\mathfrak{F}$, die sich durch einen Weg γ in $\mathfrak{F}$ mit einem Punkt $z \in \mathcal{R}$ verbinden lassen, so daß es über dem Träger von γ einen stetigen Schnitt ρ von p gibt mit $\rho(z) = \sigma(z)$.

M ist nicht leer, weil $\mathcal{R} \subset M$. Wegen der in 1) bewiesenen Eindeutigkeit kann man die in der Definition von M vorkommenden Schnitte ρ zu einem Schnitt τ von p über M verheften, der auf $\mathcal{R}$ mit σ übereinstimmt. Weil $\mathfrak{F}$ lokal wegzusammenhängend ist, folgt aus der Definition von M mit Hilfe von (0.6) unmittelbar, daß M offen in $\mathfrak{F}$ und τ stetig ist.

3) Behauptung: Jeder Punkt von $\tau(M)$ ist Berührungspunkt von $\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\})$.

Beweis: Zu $y \in \tau(M)$ gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \rightarrow M$, so daß $\tau \circ \gamma$ y mit $\sigma(\mathcal{R})$ verbindet, und nach (0.6) eine ϵ -Umgebung U von $\gamma([0,1])$, auf die sich τ stetig fortsetzen läßt. Zu jedem $\delta \in]0, \epsilon[$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $\gamma_j : [0,1] \rightarrow \mathfrak{F}_j$, so daß $\|\gamma_j(t) - \gamma(t)\| < \delta$ für alle t . $\gamma([0,1])$ besteht also aus Berührungspunkten von $\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$. Weil τ auf U stetig ist und auf $\gamma_j([0,1])$ mit σ übereinstimmt, besteht $\tau \circ \gamma([0,1])$ aus Berührungspunkten von $\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\})$.

4) Behauptung: $d_n(\tau(M)) > 0$.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von d_n folgt die Behauptung sofort aus 3) und den Voraussetzungen.

5) Behauptung : M ist abgeschlossen in $\mathfrak{F}$.

Beweis: x sei ein Häufungspunkt von M in $\mathfrak{F}$. Es sei $r := d_n(\tau(M))$. Nach 4) ist $r > 0$. Es gibt einen Punkt $y \in M$, der sich in $\mathfrak{F} \cap B(y, r)$ durch einen Weg γ mit x verbinden läßt. Die Umkehrung von $p|B(\tau(y), r) \rightarrow B(y, r)$ ist ein stetiger Schnitt, dessen Beschränkung auf den Träger von γ gemäß 1) eine Fortsetzung von τ liefert. Folglich ist $x \in M$.

6) Es ist nunmehr gezeigt, daß M nicht leer, offen und abgeschlossen in $\mathfrak{F}$ ist. Weil $\mathfrak{F}$ als zusammenhängend vorausgesetzt war, muß $M = \mathfrak{F}$ sein. q.e.d.

Wir wollen uns nun überlegen, wie man von der unhandlichen Bedingung $d_n(\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\})) > 0$ in obigem Satz loskommen kann. BEHNKE konnte sie aus den Voraussetzungen seines Kontinuitätssatzes herleiten (siehe den weiter oben ausgeführten ersten Schritt seines Beweises); seine Schlußweise funktioniert jedoch nicht mehr, wenn $\mathfrak{F}$ unendlichdimensional ist, weil dann der Rand $\mathcal{R}$ von $\mathfrak{F}$ nicht mehr kompakt sein muß und daher die Holomorphiekonvexität nicht mehr ausgenützt werden kann. Wie wir zeigen werden, ist es deshalb günstiger, statt der Holomorphiekonvexität die Pseudokonvexität der Existenzgebiete holomorpher Funktionen zu verwenden. Außerdem erhält man dann auch automatisch Kontinuitätssätze für meromor-

phe Funktionen und für holomorphe Abbildungen mit Werten in gewissen Räumen, weil deren Existenzgebiete ebenfalls pseudokonvex sind, wie wir in den nächsten Kapiteln sehen werden.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Plurisubharmonizität, der 1945 von P. Lelong in [35] eingeführt wurde.

Eine nach oben halbstetige numerische Funktion ψ auf einer offenen Menge Ω eines Banachraumes E heißt plurisubharmonisch (kurz: psh.), wenn für alle $a \in \Omega$ und $b \in E$ die Funktion $\lambda \rightarrow \psi(a + \lambda b)$ in einer Nullumgebung von $\emptyset$ subharmonisch ist. Weil die Komposition einer holomorphen Abbildung mit einer psh. Funktion psh. ist (siehe [35] oder [27, HERVÉ, p.88]), ist es vernünftig, folgende Definition zu treffen.

Eine nach oben halbstetige Funktion ψ auf einer Teilmenge M eines reduzierten komplexen Raumes Ξ oder einer Banachmannigfaltigkeit Ξ nennen wir plurisubharmonisch, wenn für jede holomorphe Abbildung $h: \Delta(0,1) \rightarrow \Xi$ mit $h(\Delta(0,1)) \subset M$ die Funktion $\psi \circ h$ subharmonisch ist.

Für eine Banachmannigfaltigkeit Ξ bezeichne $\mathcal{P}(\Xi)$ die Menge der psh. Funktionen auf Ξ . Sind $B \subset \Xi$ und $\psi \in \mathcal{P}(\Xi)$, so sei $\|\psi\|_B := \sup \{ \psi(x) : x \in B \}$, und die $\mathcal{P}(\Xi)$ -konvexe Hülle von B wird definiert als

$$\tilde{\mathcal{P}}(B) := \tilde{\mathcal{P}}_{\Xi}(B) := \{ x \in \Xi : \psi(x) \leq \|\psi\|_B \text{ für jedes } \psi \in \mathcal{P}(\Xi) \}.$$

Es ist üblich, eine Mannigfaltigkeit $p: \Omega \rightarrow E$ über einem Banachraum E pseudokonvex zu nennen, wenn $-\log d_{\Omega}$ plurisubharmonisch ist. Von den vielen zur Pseudokonvexität äquivalenten Eigenschaften wollen wir einige prägnante zitieren.

(2.3) Satz : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei eine Mannigfaltigkeit über dem Banachraum E . Folgende Aussagen sind äquivalent :

- (i) $p: \Omega \longrightarrow E$ ist pseudokonvex.
- (ii) Für jedes $a \in E$ ist $-\log \delta_{\Omega}(\cdot, a)$ psh..
- (iii) Für jeden endlichdimensionalen komplexen affinen Teilraum F von E ist $p|p^{-1}(F) \longrightarrow F$ pseudokonvex.
- (iv) Für jedes $B \subset \Omega$ gilt $d_{\Omega}(B) = d_{\Omega}(\tilde{p}_{\Omega}(B))$.
- (v) Für jede kompakte Teilmenge K von Ω gilt $d_{\Omega}(K) = d_{\Omega}(\tilde{p}_{\Omega}(K))$.

Beweis: siehe z.B. [51, SCHOTTENLOHER , p.24] .

Wir kehren nun zurück zu der Frage, wann die Voraussetzung $d_{\Omega}(\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i: i \in \mathbb{N}\})) > 0$ von Satz (2.2) erfüllt ist. Weil wir im Grunde genommen an Kontinuitätssätzen für holomorphe und meromorphe Funktionen interessiert sind und wir in den folgenden beiden Kapiteln zeigen werden, daß deren Existenzgebiete pseudokonvex sind, wollen wir die Mannigfaltigkeit $p: \Omega \longrightarrow E$ als pseudokonvex voraussetzen. Die zur Pseudokonvexität äquivalente Konvexitätseigenschaft (iv) in Satz (2.3) bietet sich an, um BEHNKES Beweismethode auf den unendlichdimensionalen Fall zu übertragen, weil bei ihr Kompaktheit keine Rolle spielt. Wenn $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist, muß man dann allerdings zusätz-

lich fordern, daß sich σ auf eine Umgebung W von R ausdehnen läßt, für die gilt

$$(1) \quad d_{\Omega}(\sigma(W)) > 0 .$$

Diese Bedingung ist jedoch leichter nachzuprüfen als

$$(2) \quad d_{\Omega}(\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\})) > 0 ;$$

sie ist z.B. für alle stetigen Schnitte erfüllt, die bereits auf einer ϵ -Umgebung von R definiert sind, und wenn es uns gelingt, (2) aus (1) herzuleiten, bekommen wir mit Hilfe von (2.2) einen Kontinuitätssatz, der für alle stetigen Schnitte über einer vorgegebenen Menge gilt. Wegen

$$(2.3)(iv) \text{ folgt (2) aus (1) sicher dann, wenn } \tilde{\mathfrak{P}}_{\Omega}(\sigma(W))$$

$\sigma(\cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\})$ umfaßt. Auf Grund der Definition von $\tilde{\mathfrak{P}}(\sigma(W))$ ist es naheliegend, diese Inklusion aus einem schwachen Maximumprinzip für psh. Funktionen zu folgern.

(2.4) Satz : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über dem Banachraum E . $\mathfrak{F}_i, i \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{F}$ seien wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Mengen in E . Es seien nicht leere Teilmengen $R_i \subset \mathfrak{F}_i$ und $R \subset \mathfrak{F}$ gegeben, so daß auf $\mathfrak{F}_i$ das schwache Maximumprinzip für psh. Funktionen bezüglich R_i gilt, d.h. daß $\psi(x) \leq \sup_{R_i} \psi$ für alle $x \in \mathfrak{F}_i$ und alle psh. Funktionen ψ auf $\mathfrak{F}_i$.

a) Es gelte $\mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}$, und es gebe eine Umgebung W von R , die alle R_i enthält. σ sei ein stetiger Schnitt von p über $W \cup \cup\{\mathfrak{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$ mit $d_{\Omega}(\sigma(W)) > 0$. Dann gibt es einen stetigen Schnitt τ von p über $\mathfrak{F}$ mit $\tau|_R = \sigma|_R$.

- b) Es gelte $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ und $\mathcal{R}_i \Rightarrow \mathcal{R}$. W sei eine ϵ -Umgebung von $\mathcal{R}$ und σ ein stetiger Schnitt von p über $W \cup \{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es einen stetigen Schnitt τ von p über $\mathcal{F}$ mit $\tau|_{\mathcal{R}} = \sigma|_{\mathcal{R}}$.
- c) Es gelte $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ und $\mathcal{R}_i \Rightarrow \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ sei kompakt und σ sei ein stetiger Schnitt von p über $\mathcal{R} \cup \{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es einen stetigen Schnitt von p über $\mathcal{F}$ mit $\tau|_{\mathcal{R}} = \sigma|_{\mathcal{R}}$.

Beweis: Nur Teil c) ist noch zu beweisen.

Weil $\mathcal{R}$ kompakt ist, gibt es nach (0.6) ein $\epsilon > 0$ und einen stetigen Schnitt ρ über $U := U_\epsilon(\mathcal{R})$, der auf $\mathcal{R}$ mit σ übereinstimmt. Wegen der Offenheit von ρ ist $\sigma^{-1}(\rho(U))$ eine Umgebung von $\mathcal{R}$ in $D := \mathcal{R} \cup \{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$. Wählt man δ so klein, daß $U_\delta(\mathcal{R}) \cap D \subset U \cap \sigma^{-1}(\rho(U))$, so stimmen ρ und σ auf $U_\delta(\mathcal{R}) \cap D$ überein. Damit hat man σ fortgesetzt auf $U_\delta(\mathcal{R}) \cup D$ und kann b) anwenden. q.e.d.

Der Grund dafür, daß wir Maximumprinzipien ins Spiel gebracht haben, ist nicht allein in der Beweistechnik zu suchen; Kontinuitätssätze scheinen vielmehr grundsätzlich mit Maximumprinzipien in Verbindung zu stehen. Obwohl wir die Gültigkeit des Maximumprinzips auf der Grenzfläche $\mathcal{F}$ nicht benötigt haben (auch BEHNKE hat sie in [4] nicht benötigt), ist sie doch in vielen Fällen notwendig. H.BEHNKE und F.SOMMER haben in [5] gezeigt, daß man zu einer Fläche im $\mathbb{C}^n$, auf der das Maximumprinzip für holo-

morphe Funktionen nicht gilt , eine dagegen konvergierende Folge von Flächen finden kann , für die der Kontinuitätssatz für holomorphe Funktionen verletzt ist .

Maximumprinzipien für plurisubharmonische Funktionen .

Wir sind weit davon entfernt , alle Teilmengen eines Banachraumes angeben zu können , auf denen ein Maximumprinzip für psh. Funktionen gilt . Dieses Problem ist schon im $\mathbb{C}^n$ für holomorphe Funktionen nicht gelöst (außer für $n=1,2$) . Wir beschränken uns sogar von vornherein auf die Untersuchung von Gebieten in analytischen Mengen .

Wir erinnern an das starke Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (siehe z.B. [27, HERVÉ]):

Nimmt eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet in $\mathbb{C}$ ihr Supremum an , so ist sie konstant .

(2.5) Satz : Jede psh. Funktion ψ auf einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit Ω , die ihr Supremum annimmt , ist konstant .

Beweis: Sei $m := \sup_{\Omega} \psi$. Die Menge $U := \{x \in \Omega : \psi(x) < m\}$ ist offen und $\neq \Omega$. Nehmen wir an , U sei nicht leer . Dann besitzt U einen Randpunkt y . Vermöge lokaler Koordinaten findet man eine komplexe Kurve , die sowohl durch y als auch durch einen Punkt $z \in U$ geht . Wegen $\psi(y) = m$ folgt aus dem starken Maximumprinzip für subharmonische Funk-

tionen $\psi(z) = m$ im Widerspruch zu $z \in U$.

q.e.d.

Im Endlichdimensionalen lässt sich daraus sehr einfach das schwache Maximumprinzip herleiten .

(2.6) Satz : B sei ein relativ kompaktes Gebiet in einer nicht kompakten komplexen Mannigfaltigkeit , und ψ sei psh. in B . Dann gilt für alle $z \in B$

$$\psi(z) \leq \sup \left\{ \limsup_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in B}} \psi(x) : a \in \text{Rd } B \right\} \dots$$

Beweis: Durch $f(z) := \psi(z)$ für $z \in B$ und $f(z) := \limsup_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in B}} \psi(x)$

für $z \in \text{Rd } B$ wird eine nach oben halbstetige Funktion auf $\bar{B}$ definiert . Weil $\bar{B}$ kompakt ist , nimmt sie dort ihr Supremum an . In B kann sie es wegen (2.5) nur dann annehmen , wenn sie konstant ist .

q.e.d.

In unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten gibt es keine nicht leeren relativ kompakten Gebiete . Man könnte daran denken , die Kompaktheit durch eine Beschränktheitsbedingung zu ersetzen ; mir ist jedoch keine derartige Aussage bekannt außer dem folgenden Spezialfall .

(2.7) Satz : B sei ein beschränktes Gebiet in einem Banachraum , ψ sei psh. auf B . Dann gilt für alle $z \in B$

$$\psi(z) \leq \sup \left\{ \limsup_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in B}} \psi(x) : a \in \text{Rd } B \right\} \dots$$

Beweis: Durch Schneiden mit endlichdimensionalen Teilräumen auf (2.6) zurückführen . q.e.d.

Insbesondere ist mir nicht bekannt , ob ein schwaches Maximumprinzip auf unendlichdimensionalen Untermannigfaltigkeiten eines Banachraumes gilt . In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage , ob jede beschränkte komplexe Untermannigfaltigkeit eines Banachraumes diskret ist , wie das im Endlichdimensionalen der Fall ist . Für analytische Mengen ist dies nicht richtig , wie ein Gegenbeispiel von DOUADY in [20] zeigt .

Wir beweisen nun , daß auf verzweigten analytischen Überlagerungen das starke und das schwache Maximumprinzip gelten .

Wir verwenden die Bezeichnungen von (0.17) . $\pi: X \longrightarrow U$ sei eine verzweigte analytische Überlagerung .

(2.8) Lemma : Ist $x \in X$ und L eine affine komplexe Gerade durch $\pi(x)$, so gibt es ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und eine eigentliche holomorphe Abbildung $g: D \longrightarrow X$, so daß $g(D)$ eine irreduzible Komponente von $\pi^{-1}(L \cap U)$ ist , die x enthält , und $\pi \circ g(D)$ gleich der Zusammenhangskomponente von $\pi(x)$ in $L \cap U$ ist .

Beweis: $\pi^{-1}(L \cap U)$ ist analytisch und ist wegen (0.14) in jedem Punkt höchstens eindimensional . Weil π offen ist (siehe Bemerkung nach (0.17)) , ist auch

$\pi|_{\pi^{-1}(L \cap U)} \longrightarrow L \cap U$ offen ; deshalb kann $\pi^{-1}(L \cap U)$ keine nulldimensionalen irreduziblen Komponenten d.h. keine isolierten Punkte besitzen . Wegen (0.14) ist folglich das Bild jeder irreduziblen Komponente analytisch und eindimensional , also gleich einer Zusammenhangskomponente von $L \cap U$. Sei A eine irreduzible Komponente von $\pi^{-1}(L \cap U)$, die x enthält . Die Normalisierung von A ist eine eindimensionale nicht kompakte komplexe Mannigfaltigkeit , deren universelle Überlagerung sich biholomorph auf ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ abbilden läßt . Die so induzierte Abbildung $g: D \longrightarrow A$ ist holomorph , surjektiv und eigentlich.

q.e.d.

(2.9) Korollar : Jeder Punkt x einer endlichdimensionalen oder endlichdefinierten analytischen Menge X besitzt beliebig kleine Umgebungen U , derart daß sich jeder Punkt $y \in U$ durch eine komplexe Kurve in U mit x verbinden läßt .

Jede endlichdimensionale oder endlichdefinierte analytische Menge ist lokal wegzusammenhängend .

Beweis: X sei in x irreduzibel . Nach (0.16) gibt es dann eine Umgebung U von x und eine verzweigte analytische Überlagerung $\pi: U \longrightarrow V$ einer Kugel V in einem Banachraum. Durch Verkleinern kann man erreichen , daß $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$. Ist $y \in U$ und L die komplexe Gerade durch $\pi(x)$ und $\pi(y)$, so enthält die irreduzible Komponente von $\pi^{-1}(L \cap V)$, die

y enthält, auch x und ist wegen (2.8) der Träger einer komplexen Kurve.

Ist X reduzibel in x , so zerlegt man X in x in irreduzible Komponenten und führt obigen Schluß für jede Komponente durch. q.e.d.

(2.10) Starkes Maximumprinzip für psh. Funktionen :

X sei ein zusammenhängender reduzierter komplexer Raum oder eine endlichdefinierte analytische Teilmenge einer Banachmannigfaltigkeit. Dann ist jede plurisubharmonische Funktion ψ auf X , die ihr Supremum annimmt, konstant.

Beweis: 1) Wir betrachten zunächst den Fall, daß X irreduzibel ist. Sei $x \in X$ und $\psi(x) = \sup_X \psi =: m$. Wegen (2.9) und (2.5) ist ψ auf einer Umgebung von x identisch gleich m . Es gibt daher einen regulären Punkt $y \in X$ mit $\psi(y) = m$. Weil X irreduzibel ist, ist die Menge der regulären Punkte X^* eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und aus (2.5) folgt, daß ψ auf X^* konstant ist. Da X^* dicht ist und ψ nach oben halbstetig ist, ist ψ sogar auf X konstant.

2) X sei reduzibel. Y_0 sei eine irreduzible Komponente von X , auf der ψ das Supremum $\sup_X \psi$ annimmt. M sei die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten Y von X mit folgender Eigenschaft: Es gibt irreduzible Komponenten $Y_1, \dots, Y_n$ von X , so daß $Y_1 = Y_0$, $Y_n = Y$ und $Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, n-1$. M ist nicht leer und abgeschlossen, weil die Familie der

irreduziblen Komponenten von X lokalendlich ist. M ist auch offen, weil für $y \in M$ alle irreduziblen Komponenten von X , die y enthalten, in M liegen. Wegen des Zusammenhangs von X folgt $M = X$. Aus 1) ergibt sich, daß ψ auf M und somit auf X konstant ist. q.e.d.

(2.11) Schwaches Maximumprinzip für psh. Funktionen :

Es sei mindestens eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt.

- a) X sei ein zusammenhängender reduzierter komplexer Raum und B ein relativ kompaktes Gebiet in X , $B \neq X$.
- b) $\pi: X \longrightarrow U$ sei eine verzweigte analytische Überlagerung eines Gebietes U in einem Banachraum E_1 . B sei ein Gebiet in X , so daß $\pi(B)$ beschränkt ist und die abgeschlossene Hülle von $\pi(B)$ bezüglich E_1 in U liegt.

In beiden Fällen gilt für jede psh. Funktion ψ auf B und jedes $z \in B$

$$\psi(z) \leq \sup \left\{ \limsup_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} \psi(x) : a \in \text{Rd } B \right\} .$$

Beweis: a) Die durch $f(z) := \limsup_{x \rightarrow z, x \in B} \psi(x)$, für $z \in \text{Rd } B$ und $f(z) := \psi(z)$ für $z \in B$ definierte Funktion ist nach oben halbstetig und nimmt auf der kompakten Menge $\bar{B}$ ihr Supremum an. Nimmt sie es in B an, so ist sie nach (2.10) konstant.

b) Sei $z \in B$. Wähle eine komplexe Kurve $g: D \longrightarrow X$ durch z wie in (2.8). Dann ist $g^{-1}(B)$ relativ kompakt in D und wegen $g(\text{Rd } f^{-1}(B)) \subset \text{Rd } B$ folgt aus (2.6) die Behauptung.

q.e.d.

Eine Menge B mit den Eigenschaften , wie sie in der Voraussetzung b) des obigen Satzes (2.11) beschrieben sind , werden wir bezeichnen als ein beschränktes Gebiet , das ganz in einer verzweigten analytischen Überlagerung enthalten ist .

Diverse Kontinuitätssätze für pseudokonvexe Gebiete .

$p: \Omega \longrightarrow E$ sei im Folgenden immer eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über dem Banachraum E .

Mit Hilfe des Schwachen Maximumprinzips (2.11) können wir Mengen $\mathfrak{F}_i$ und $\mathcal{R}_i$ angeben , für die die Aussagen des Satzes (2.4) gelten .

(2.12) Satz : Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei B_i ein beschränktes Gebiet , das ganz in einer verzweigten analytischen Überlagerung enthalten ist , oder ein relativ kompaktes Gebiet in einem zusammenhängenden reduzierten komplexen Raum X_i . Es gelte $B_i \neq X_i$, und $\overline{B}_i$ sei lokal wegzusammenhängend.

$\mathfrak{F}_i$ sei das Bild von $\overline{B}_i$ unter einer in $\overline{B}_i$ stetigen und in B_i holomorphen Abbildung mit Werten in E , $\mathcal{R}_i$ sei das Bild von $\text{Rd } B_i$ unter dieser Abbildung . $\mathfrak{F}$ und $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}$ seien abgeschlossene nicht leere Teilmengen von E , $\mathfrak{F}$ sei wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend .

Dann gelten die Aussagen a) , b) , c) von Satz (2.4).

Beweis: (2.4) und (2.11) . q.e.d.

Mit Hilfe des Kontinuitätssatzes (2.12) wollen wir nun Verallgemeinerungen des HARTOGSSchen Kontinuitätssatzes beweisen, die dem bekannten Satz von SEVERI (siehe z.B. [6 , BEHNKE-STEIN] ähnlich sind. Sie erlauben uns, auf die ganz zu Anfang des Kapitels aufgeworfene Frage zu antworten, unter welchen (hinreichenden) Bedingungen alle stetigen Schnitte über einer Menge M zu stetigen Schnitten über einem M umfassenden Gebiet fortgesetzt werden können.

Eine Abbildung $\Phi: \bar{B} \times T \longrightarrow E$ in einen Banachraum E heißt analytische Schichtung, wenn folgendes gilt:

B ist ein Gebiet in einem reduzierten komplexen Raum oder in einer analytischen Teilmenge einer Banachmannigfaltigkeit. $\bar{B}$ ist lokal wegzusammenhängend.

T ist ein zusammenhängender, lokalzusammenhängender topologischer Raum.

Φ bildet $\bar{B} \times T$ topologisch auf $\Phi(\bar{B} \times T)$ ab. Für jedes $t \in T$ ist $\Phi(,t)$ holomorph auf B .

Zur Abkürzung werden wir $\mathfrak{F}_t := \Phi(\bar{B} \times \{t\})$ und $\mathfrak{R}_t := \Phi(\text{Rd } B \times \{t\})$ schreiben. Aus der Definition folgt, daß T Hausdorffsch ist und dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Ist B ein relativ kompaktes Gebiet in einer endlichdimensionalen analytischen Menge, so kann man mit Hilfe einer Verallgemeinerung des REMMERTSchen Abbildungssatzes (siehe [47 , RUGET; 48 , SAINT-LOUP; 37 , MAZET]) schließen, daß $\Phi(B \times \{t\})$ für jedes $t \in T$ lokal analytisch in E ist.

(2.13) Satz : $\Phi: \bar{B} \times T \longrightarrow E$ sei eine analytische Schichtung . B sei ein relativ kompaktes Gebiet in einem zusammenhängenden reduzierten komplexen Raum X mit $B \neq X$. t_0 sei ein Punkt in T .
Dann ist jeder stetige Schnitt σ von p über $\mathfrak{F}_{t_0} \cup \cup \{ \mathcal{R}_t : t \in T \}$ zu einem stetigen Schnitt τ über $\cup \{ \mathfrak{F}_t : t \in T \}$ fortsetzbar .

Beweis: M sei die Menge aller $t \in T$, derart daß σ von $\mathcal{R}_t$ aus zu einem stetigen Schnitt über $\mathfrak{F}_t$ fortgesetzt werden kann . Weil $\mathfrak{F}_{t_0}$ kompakt ist , ist nach (0.6) jede solche Fortsetzung auf einer Umgebung von $\mathfrak{F}_{t_0}$ definiert , also insbesondere auf einer Menge der Gestalt $\cup \{ \mathfrak{F}_s : s \in U \}$ für eine zusammenhängende Umgebung U von t_0 in T . Wegen des Identitätssatzes (0.4) gilt $U \subset M$. Folglich ist M offen in T . Wegen $t_0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Die Abgeschlossenheit von M ergibt sich aus (2.12)c) unter Verwendung von (2.2) . Wegen des Zusammenhangs von T ist damit $M = T$ gezeigt . Die auf diese Weise definierte Fortsetzung von σ ist stetig. q.e.d.

Der Beweis von (2.13) funktioniert nicht mehr , wenn B unendlichdimensional ist , weil dann die $\mathfrak{F}_t$ nicht mehr kompakt sind . Man kann die Kompaktheit der $\mathfrak{F}_t$ ersetzen durch die gleichmäßige Stetigkeit von Φ . Um (2.12) anwenden zu können , muß man außerdem verlangen , daß σ nicht nur auf $\cup \{ \mathcal{R}_t : t \in T \}$ sondern auf einer ϵ -Umgebung vorgegeben ist .

(2.14) Satz : $\Phi: \bar{B} \times T \longrightarrow E$ sei eine analytische Schichtung . Dabei sei B ein beschränktes Gebiet , das ganz in einer verzweigten analytischen Überlagerung enthalten ist , und T ein metrischer Raum . Φ sei gleichmäßig stetig , wobei auf $\bar{B} \times T$ als Metrik das Maximum der Metriken von $\bar{B}$ und T genommen wird . Es seien $r > 0$ und $V \subset T$ offen und nicht leer .

Dann ist jeder stetige Schnitt von p über

$U(\mathfrak{F}_t : t \in V) \cup (U(\mathfrak{R}_t : t \in T) + B_E(0, r))$ zu einem stetigen Schnitt τ über $U(\mathfrak{F}_t : t \in T)$ fortsetzbar .

Beweis: M sei die Menge aller $t \in T$, derart daß es eine Umgebung U von t in T und einen stetigen Schnitt von p über $U(\mathfrak{F}_t : t \in U)$ gibt , der σ fortsetzt . M ist offen und nicht leer . Wir zeigen , daß auch abgeschlossen ist .

Sei s ein Berührungspunkt von M und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen s konvergente Folge in M . Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von Φ sind alle Voraussetzungen von (2.13)b) erfüllt (W ist dabei $\mathfrak{R}_s + B_E(0, r)$) , und folglich ist σ auf $\mathfrak{F}_s$ fortsetzbar . Wir haben zu zeigen , daß σ sogar auf eine Umgebung $U(\mathfrak{F}_t : t \in U)$ von $\mathfrak{F}_s$ fortgesetzt werden kann .

Aus Teil 4) des Beweises von Satz (2.3) folgt $d_{\Omega}(y) \geq \frac{r}{2}$ für alle $y \in \sigma(\mathfrak{F}_s)$; dies bedeutet , daß es zu jedem $y \in \mathfrak{F}_s$ einen stetigen Schnitt ρ_y über $B(y, \frac{r}{2})$ mit $\rho_y(y) = \sigma(y)$ gibt . Weil Φ gleichmäßig stetig ist , kann man eine zusammenhängende Umgebung U von s in T und zu jedem $b \in \bar{B}$ eine zusammenhängende Umgebung V_b in $\bar{B}$ finden , so daß

$A_y := \Phi(V_b \times U) \subseteq B_E(y, \frac{r}{2})$, wobei $y := \Phi(b, s)$. Wir behaupten nun, daß $\rho_x|_{A_x \cap A_y} = \rho_y|_{A_x \cap A_y}$ für alle $x, y \in \mathfrak{F}_S$. Ist nämlich $z \in A_x \cap A_y$, $z = \Phi(b, t)$, so ist die zusammenhängende Menge $\Phi(\{b\} \times U)$ in $A_x \cap A_y$ enthalten und enthält ihrerseits z und $\Phi(b, s)$; wegen $a := \Phi(b, s) \in \mathfrak{F}_S$ gilt $\rho_x(a) = \sigma(a) = \rho_y(a)$ und deshalb auch $\rho_x(z) = \rho_y(z)$. Durch die ρ_x , $x \in \mathfrak{F}_S$, wird also ein stetiger Schnitt über $\Phi(\bar{B} \times U)$ definiert, der σ fortsetzt. Dies bedeutet gerade $s \in M$. M ist also abgeschlossen, und es folgt $M = T$. Mit Hilfe des Identitätssatzes lassen sich die lokalen Fortsetzungen zu einer globalen Fortsetzung von σ verheften.

q.e.d.

(2.15) Korollar: $E = E_1 \times E_2$ sei eine direkte Zerlegung. G_i sei ein Gebiet in E_i , $i=1,2$; G_1 sei beschränkt. Es seien $r > 0$ und $V \subseteq G_2$ offen und nicht leer. Dann ist jeder stetige Schnitt von p über $(\bar{G}_1 \times V) \cup ((\text{Rd } G_1 \times G_2) + B_E(0, r))$ zu einem stetigen Schnitt über $\bar{G}_1 \times G_2$ fortsetzbar.

Auf die in (2.14) gegenüber (2.13) zusätzlich gestellten Forderungen kann man verzichten, wenn man stattdessen eine spezielle lokale Zusammenhangseigenschaft von B voraussetzt, die es ermöglicht, die Aussage auf (2.13) zurückzuführen.

$\pi: X \rightarrow U$ sei eine verzweigte analytische Überlagerung eines Banachraumes E_1 (vgl. (0.17)). Wir nennen eine Menge $B \subset X$ in einem Punkt $b \in B$ endlichdimensional zusammenhängend, wenn b bezüglich B eine Umgebungsbasis aus Mengen W mit der folgenden Eigenschaft besitzt:

Zu jedem $x \in W$ gibt es einen Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow W$ von b nach x , derart daß $\pi(\gamma([0,1]))$ in einem endlichdimensionalen Teilraum von E_1 liegt.

Eine in jedem Punkt endlichdimensional zusammenhängende Menge heiße lokal endlichdimensional zusammenhängend.

Beispiele dafür sind Gebiete in Banachräumen. Jedoch ist der Abschluß eines Gebietes nicht immer lokal endlichdimensional zusammenhängend, wie das folgende Beispiel zeigt:

Wir betrachten den Hilbertraum l_2 . Für $n \in \mathbb{N}$ seien $e_n := (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$, S_n die Strecke von $\frac{1}{n} e_n$ nach $\frac{1}{n} e_{n+1}$ und R_n die Strecke von $\frac{1}{n} e_{n+1}$ nach $\frac{1}{n+1} e_{n+1}$.

$\cup \{S_n \cup R_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist der Träger einer Kurve von e_1 nach 0 .

$B_n := \{x \in l_2 : d(x, S_n \cup R_n) < 1/2n^2\}$.

$B := \cup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Gebiet in l_2 ; 0 ist ein Randpunkt von B .

Wir zeigen, daß $\bar{B}$ in 0 nicht endlichdimensional zusammenhängend ist. F sei ein endlichdimensionaler Teilraum von l_2 . Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$

$$F \cap (\phi e_n \oplus \phi e_{n+1}) = \{0\}.$$

C_n sei die Strecke von e_n nach e_{n+1} . $\cup \{C_n : n \leq N\}$ ist abgeschlossen und hat einen positiven Abstand δ zu F . Für

$n > N$ hat dann $S_n \cup R_n$ einen Abstand $\phi_n > \frac{1}{n+1} \phi$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $1/2n^2 < \phi/n+1$ für alle $n > m$, also $\overline{B}_n \cap F = \emptyset$ für $n > m$. Weil die Vereinigung der $\overline{B}_n$ außer im Nullpunkt lokalendlich ist, gilt $\overline{B} = \{0\} \cup \{\overline{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$, und es folgt

$$F \cap \overline{B} \cap B(0, \frac{1}{2m}) \subset \{0\} \cup (F \cap \{\overline{B}_n : n > m\}) = \{0\} \quad \text{q.e.d.}$$

(2.16) Satz : $\phi: \overline{B} \times T \longrightarrow E$ sei eine analytische Schichtung. B sei ein beschränktes Gebiet, das ganz in einer verzweigten analytischen Überlagerung enthalten ist. $\overline{B}$ sei lokal endlichdimensional zusammenhängend, und T sei lokal wegzusammenhängend. Es sei $t_0 \in T$.

Dann ist jeder stetige Schnitt σ von p über

$$\overline{B}_{t_0} \cup \{\mathcal{R}_t : t \in T\}$$

zu einem stetigen Schnitt τ über $U(\overline{B}_t : t \in T)$ fortsetzbar.

Beweis: B sei beschränkt und ganz enthalten in der verzweigten analytischen Überlagerung $\pi: X \longrightarrow U$ des Banachraumes E_1 .

F sei ein endlichdimensionaler Teilraum von E_1 . Für jede Zusammenhangskomponente Z von $B \cap \pi^{-1}(F)$ kann man (2.13) auf $\phi|_{\overline{Z} \times T}$ anwenden und erhält so einen stetigen Schnitt τ_F über $\overline{\phi((B \cap \pi^{-1}(F)) \times T)}$, der σ fortsetzt.

Sind F_1 und F_2 endlichdimensionale Teilräume von E_1 , so stimmen τ_{F_1} und τ_{F_2} im gemeinsamen Definitionsbereich überein, weil sie dort mit $\tau_{F_1 + F_2}$ übereinstimmen. Deshalb

definieren die τ_F einen Schnitt τ über $\Phi(\bar{B} \times T)$.
 Weil $\bar{B}$ lokal endlichdimensional zusammenhängt, ist τ
 auf Grund von (0.5) auf jeder Schicht $\mathfrak{F}_t$ stetig. Weil
 τ nach Konstruktion auch auf den transversalen Schich-
 ten $\Phi(\{b\} \times T)$ stetig ist und T lokal wegweise zusammen-
 hängt, folgt wiederum mit (0.5) die Stetigkeit von τ .
 q.e.d.

Als Folgerung erhält man unendlichdimensionale Varianten
 des HARTOGSschen Kontinuitätssatzes.

(2.17) Korollar: $E = E_1 \times E_2$ sei eine direkte Zerlegung.

G_1 sei ein beschränktes Gebiet in E_1 , $\bar{G}_1$ sei lo-
 kal endlichdimensional zusammenhängend (dies ist
 z.B. der Fall, wenn jeder Randpunkt von $\bar{G}_1$ eine
 Umgebungsbasis bez. $\bar{G}_1$ aus konvexen Mengen besitzt).

G_2 sei ein Gebiet in E_2 , $y \in G_2$.

Dann kann jeder stetige Schnitt von p über

$(\text{Rd } G_1 \times G_2) \cup (\bar{G}_1 \times \{y\})$ zu einem stetigen Schnitt
 über $\bar{G}_1 \times G_2$ fortgesetzt werden.

wir wollen noch einen Kontinuitätssatz anführen, dessen
 Beweismethode von den vorigen verschieden ist. Der ent-
 sprechende Kontinuitätssatz für holomorphe Funktionen im
 endlichdimensionalen, auf dessen Beweis sich der unend-
 lichdimensionale Fall zurückführen läßt, ist in [58, STEIN]

bewiesen . Er beruht im wesentlichen auf folgender Aussage .

(2.18) Lemma : ψ sei eine subharmonische Funktion in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. $\gamma: [0,1] \rightarrow D$ sei eine Jordankurve . Dann gilt

$$\psi(\gamma(1)) = \limsup_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \psi(\gamma(t)) \quad .$$

Beweis: [59, STEIN , p.131] , vgl. auch [56, SIU] .

$p: \Omega \rightarrow E$ sei ein Gebiet , F sei ein Untervektorraum von E . Für $x \in \Omega$ definieren wir die Randdistanz von x in Richtung F als

$$\begin{aligned} \delta_{\Omega}(x, F) &:= \sup \{ r > 0 : \text{Es gibt } U \subset \Omega , \text{ so da\ss } x \in U \text{ und} \\ &\quad p|_U \rightarrow p(x) + B_F(p(x), r) \text{ topologisch ist} \} \\ &= \inf \{ \delta_{\Omega}(x, a) : a \in F , \|a\| = 1 \} . \end{aligned}$$

Man sieht leicht , da\ss $\delta_{\Omega}(\cdot, F)$ nach unten halbstetig ist, wenn F endlichdimensional ist . Ist F unendlichdimensional , so ist dies nicht immer richtig , wie das folgende Beispiel zeigt .

B sei die offene Einheitskugel in l_1 .

$$r(z) := \max \left\{ \frac{1}{2} - \|z\| , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |z_n| \right\} \quad \text{f\"ur } z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B .$$

r ist stetig und positiv , deshalb ist

$$\Omega := \{ (z, \lambda) \in B \times \mathbb{C} : |\lambda| < r(z) \}$$

ein Gebiet in $l_1 \times \mathbb{C}$.

Für $\zeta \in]\frac{1}{2}, 1[$ ist $\inf\{r(z) : \|z\| = \zeta\} = 0$; daher gilt
 $\delta_{\Omega}((0, \lambda), 1_1) \leq 1/2$ für $\lambda \neq 0$. Weil andererseits
 $\delta_{\Omega}((0, 0), 1_1) = 1$, kann $\delta_{\Omega}(\cdot, 1_1)$ nicht nach unten stetig sein.

In einem pseudokonvexen Gebiet $p: \Omega \longrightarrow E$ ist für jeden endlichdimensionalen Untervektorraum F von E die Funktion $-\log \delta_{\Omega}(\cdot, F)$ nicht nur nach oben halbstetig, sondern sogar psh., weil sie das Supremum der psh. Funktionen $-\log \delta_{\Omega}(\cdot, a)$ mit $a \in F, \|a\| = 1$, ist (verwende (2.1)).

(2.19) Lemma: $p: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ sei ein pseudokonvexes Gebiet. Γ sei der Träger einer Jordankurve in $\mathbb{C}$, b sei ein Endpunkt von Γ . B sei bezüglich irgendeiner Norm auf dem $\mathbb{C}^n$ die offene Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius r .

Dann kann jeder stetige Schnitt σ von p über $(B \times (\Gamma - \{b\})) \cup \{(0, b)\}$ zu einem stetigen Schnitt über $B \times \Gamma$ fortgesetzt werden.

Beweis: Nach (0.6) kann σ auf eine Umgebung W von $\{0\} \times \Gamma$ ausgedehnt werden. Die Funktion $x \longrightarrow -\log \delta_{\Omega}(\sigma(x), \mathbb{C}^n)$ ist psh. auf W , insbesondere ist also die Funktion $\lambda \longrightarrow -\log \delta_{\Omega}(\sigma(0, \lambda), \mathbb{C}^n)$ auf einer Umgebung von Γ in $\mathbb{C}$ definiert und subharmonisch. Wegen $\delta_{\Omega}(\sigma(0, \lambda), \mathbb{C}^n) \geq r$ für alle $\lambda \in \Gamma - \{b\}$ gilt infolge (2.18) auch

$$\delta_{\Omega}(\sigma(0, b), \mathbb{C}^n) \geq r.$$

Es gibt deshalb einen stetigen Schnitt über einer Umge-

bung von $B \times \{b\}$, der auf Grund des Identitätssatzes σ fortsetzt . q.e.d.

Die entsprechende Aussage , in der B eine unendlichdimensionale Kugel ist , läßt sich infolge des obigen Beispiels nicht auf die gleiche Weise beweisen . Sie kann jedoch auf (2.19) zurückgeführt werden .

(2.20) Lemma : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei ein pseudokonvexes Gebiet .
 $E = E_1 \times E_2$ sei eine direkte Zerlegung , $\dim E_2 = 1$.
 Γ sei der Träger einer Jordankurve in E_2 , b sei ein Endpunkt von Γ . $B := B_{E_1}(0, r)$ für ein $r > 0$.
 Dann läßt sich jeder stetige Schnitt σ von p über $(B \times (\Gamma - \{b\})) \cup \{(0, b)\}$ zu einem stetigen Schnitt über $B \times \Gamma$ fortsetzen .

Beweis: Für jeden endlichdimensionalen Teilraum F von E_1 ist $p^{-1}(F)$ nach (2.1) pseudokonvex , und nach (2.20) gibt es einen stetigen Schnitt τ_F von p über $(B \cap F) \times \Gamma$, der im gemeinsamen Definitionsbereich mit σ übereinstimmt . Mit Hilfe von (0.5) sieht man , daß die τ_F bei Variation von F eine stetige Fortsetzung von σ auf $B \times \Gamma$ definieren . q.e.d.

(2.21) Satz : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei ein pseudokonvexes Gebiet .
 $E = E_1 \times E_2$ sei eine direkte Zerlegung , $\dim E_2 = 1$.
 Γ sei der Träger einer Jordankurve in E_2 , b sei

ein Endpunkt von Γ . D sei ein Gebiet in E_1 , x_0 ein Punkt in D .

Dann läßt sich jeder stetige Schnitt σ von p über $(D \times (\Gamma - \{b\})) \cup \{(x_0, b)\}$ zu einem stetigen Schnitt über $D \times \Gamma$ fortsetzen.

Beweis: Es gibt eine größte zusammenhängende, x_0 enthaltende Teilmenge M von D , derart daß sich σ zu einem stetigen Schnitt über $(D \times (\Gamma - \{b\})) \cup (M \times \{b\})$ fortsetzen läßt. Aus (2.20) folgt, daß M offen und abgeschlossen ist, also $M = D$. q.e.d.

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir jetzt noch eine Umkehrung der bisher bewiesenen Kontinuitätssätze angeben. Bekanntlich kann man nämlich die Pseudokonvexität durch die Gültigkeit von Kontinuitätssätzen charakterisieren. Dabei versucht man natürlich, mit einem möglichst schwachen Kontinuitätssatz auszukommen. Wir geben hier eine Variante an, die sich in den beiden folgenden Kapiteln als nützlich erweisen wird.

(2.22) Satz : Eine Mannigfaltigkeit $p: \Omega \longrightarrow E$ ist genau dann pseudokonvex, wenn gilt :

Ist Φ eine biholomorphe Abbildung von Φ^2 auf einen komplexen affinen Teilraum F von E , so kann jeder stetige Schnitt von p über

$$\Phi([\bar{\Delta}(0,1) \times \{0\}] \cup [\text{Rd } \Delta(0,1) \times \Delta(0,1)])$$

zu einem stetigen Schnitt über $\Phi(\bar{\Delta}(0,1) \times \Delta(0,1))$ fortgesetzt werden.

Beweis: Die Implikation $\Rightarrow$ folgt aus (2.13) . Wir beweisen die umgekehrte Richtung.

Wegen (2.1) genügt es zu zeigen, daß $-\log \delta_{\Omega}(\cdot, b)$ für alle $b \in E$, $b \neq 0$, psh. ist. D sei eine Teilmenge von Ω , die durch p topologisch auf $p(D)$ abgebildet wird. Für $x \in p(D)$ setzen wir $\delta(x) := \delta_{\Omega}((p|D)^{-1}(x), b)$. L sei eine komplexe affine Gerade in E , die $p(D)$ trifft. Nach [, HÖRMANDER, Th.1.6.3.] ist die Subharmonizität von $-\log \delta$ auf L äquivalent mit der folgenden Bedingung :

Ist Δ eine relativ kompakte Kreisscheibe in $L \cap p(D)$ und Q ein holomorphes Polynom auf L mit $-\log \delta(x) \leq \operatorname{Re} Q(x)$ für alle $x \in \operatorname{Rd} \Delta$, so gilt $-\log \delta(x) \leq \operatorname{Re} Q(x)$ sogar für alle $x \in \Delta$.

Sei also Δ eine relativ kompakte Kreisscheibe in $L \cap p(D)$ und Q ein holomorphes Polynom auf L , derart daß $-\log \delta(x) \leq \operatorname{Re} Q(x)$ für alle $x \in \operatorname{Rd} \Delta$. Wir können o.E. voraussetzen, daß es ein $a \in E$, $a \neq 0$, gibt, so daß $L = \mathbb{C}a$ und $\Delta = \Delta(0,1)a$. Überdies kann man annehmen, daß a und b linear unabhängig sind; denn ansonsten folgt die Subharmonizität von $-\log \delta$ auf L schon aus der Tatsache, daß jedes eindimensionale Gebiet pseudokonvex ist.

Die obige Ungleichung ist äquivalent zu $\delta(x) \geq |e^{-Q(x)}|$ für alle $x \in \operatorname{Rd} \Delta$, und dies bedeutet gerade, daß es einen stetigen Schnitt σ von p über

$$K := \Delta \cup \{x + \Delta(0, |e^{-Q(x)}|)b : x \in \operatorname{Rd} \Delta\}$$

gibt. Wir definieren eine Abbildung $\Phi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow F := \mathbb{C}a + \mathbb{C}b$ durch $\Phi(\lambda, \mu) := \lambda a + \mu e^{-Q(\lambda a)}b$. Weil a und b linear unabhängig sind, ist Φ biholomorph, und es gilt

$$\Phi^{-1}(K) = [\overline{\Delta}(0,1) \times \{0\}] \cup [\operatorname{Rd} \Delta(0,1) \times \Delta(0,1)] .$$

Nach Voraussetzung kann σ zu einem stetigen Schnitt über $\bar{\Delta}(0,1) \times \Delta(0,1)$ fortgesetzt werden. Daraus folgt unmittelbar die gewünschte Ungleichung $\delta(x) \geq |e^{-Q(x)}|$ für alle $x \in \Delta$. q.e.d.

Kapitel 3 Kontinuitätssätze für holomorphe Abbildungen

Will man die Kontinuitätssätze des vorigen Kapitels auf holomorphe Abbildungen übertragen, so hat man zunächst zu präzisieren, was unter einer holomorphen Abbildung auf einer nicht notwendig offenen Menge zu verstehen ist. Im Falle $E = \mathbb{C}^n$ sind die in den Sätzen vorkommenden Flächen $\mathfrak{F}_i$ kompakt, und es ist üblich, unter einer holomorphen Funktion f auf so einer Fläche $\mathfrak{F}_i$ eine auf einer zusammenhängenden Umgebung U von $\mathfrak{F}_i$ definierte holomorphe Funktion f zu verstehen. Für nicht kompakte $\mathfrak{F}_i$ ist diese Sprechweise nicht ganz angemessen, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Y sei ein komplexer Raum oder ein folgenvollständiger lokalkonvexer Raum. Die Garbe $\mathcal{O}_E^Y$ fassen wir als espace étalé $q: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow E$ auf. $e: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow Y$ sei die Abbildung, die jedem Abbildungskeim g_z seinen Wert $g_z(z)$ zuordnet. e ist holomorph.

Jede holomorphe Abbildung f von einer offenen Teilmenge U in E nach Y induziert einen stetigen Schnitt $[f]$ von q über U ; $[f]$ ordnet jedem $x \in U$ den Keim von f in x zu. Umgekehrt gibt es zu jedem stetigen Schnitt σ von q über einer offenen Menge U genau eine holomorphe Abbildung $f: U \longrightarrow Y$ mit $[f] = \sigma$, nämlich $f := e \circ \sigma$. Ist hingegen der Definitionsbereich D von σ nicht offen, so gibt es eine Umgebung U von D und eine holomorphe Abbildung $f: U \longrightarrow Y$ mit $[f] = \sigma$ genau dann, wenn D in $\mathcal{O}_E^Y$ eine schlichte Umgebung besitzt

d.h. wenn σ zu einem stetigen Schnitt über einer Umgebung von D ausgedehnt werden kann; also wegen (0.6) z.B. dann, wenn D kompakt ist.

Uns erscheint es vernünftig, von einer holomorphen Abbildung auch dann zu sagen, sie sei auf eine Menge $\mathfrak{F}$ holomorph fortsetzbar, wenn sie auf eine Umgebung von $\mathfrak{F}$ nur mehrdeutig fortgesetzt werden kann, wenn dabei jedoch jedem Punkt von $\mathfrak{F}$ immer nur genau ein Abbildungskeim zugeordnet wird. Deshalb wollen wir unter Kontinuitätssätzen für holomorphe Abbildungen Kontinuitätssätze für stetige Schnitte von $q: \mathcal{O}_E^Y \rightarrow E$ verstehen.

Es bleibt nunmehr zu untersuchen, für welche Y die Mannigfaltigkeit $q: \mathcal{O}_E^Y \rightarrow E$ pseudokonvex ist.

(3.1) Lemma : $q: \mathcal{O}_E^Y \rightarrow E$ ist genau dann pseudokonvex, wenn der folgende Kontinuitätssatz gilt :

$E = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b \oplus E_1$ sei eine direkte Zerlegung, $a \neq 0 \neq b$.

Es seien $r, s \in]0, 1[$.

$H := [A(0; s, 1)a \oplus \Delta(0, 1)b] \cup [\Delta(0, 1)a \oplus \Delta(0, r)b]$.

$P := \Delta(0, 1)a \oplus \Delta(0, 1)b$.

Jede auf einer Umgebung (bez. E) von H holomorphe Abbildung mit Werten in Y ist auf eine Umgebung von P holomorph fortsetzbar.

Beweis: Wir beweisen die Richtung $\Leftarrow$.

Wir prüfen das Kriterium (2.22) nach, wobei wir die dortigen Bezeichnungen verwenden. G sei ein topologischer Komplementärraum von F in E . Wegen (0.6) kann man annehmen,

σ sei auf $U :=$

$$= \Phi([\overline{\Delta(0,1)} \times \{0\}] \cup [\text{Rd } \Delta(0,1) \times \Delta(0,1)]) + B_F(0, \eta) \oplus B_G(0, \eta)$$

für ein $\eta > 0$ definiert. Die Abbildung $\Psi: \Phi^2 \times G \longrightarrow E$ mit

$$\Psi(z, x) := \Phi(z) + x \text{ ist biholomorph. } V := \Psi^{-1}(U) .$$

$f := e \circ \sigma \circ \Psi: V \longrightarrow \Phi$ ist holomorph. Wegen der Voraussetzung

ist f holomorph auf eine Umgebung W von $\overline{\Delta(0,1)} \times \Delta(0,1)$ fortsetzbar. Dies bedeutet, daß $e \circ \sigma$ eine holomorphe Fortsetzung g auf die Umgebung $\Psi(W)$ von $\Phi(\overline{\Delta(0,1)} \times \Delta(0,1))$ besitzt. $[g]$ ist ein stetiger Schnitt von q über $\Psi(W)$.

Weil $[g]|_U = \sigma$, ist $[g]|_{\Phi(\overline{\Delta(0,1)} \times \Delta(0,1))}$ eine Fortsetzung von σ , wie sie in (2.22) verlangt wird.

Die andere Richtung $\Rightarrow$ ergibt sich ebenfalls mit Hilfe von (2.22). q.e.d.

Weil eine Mannigfaltigkeit genau dann pseudokonvex ist, wenn ihre Zusammenhangskomponenten es sind, und weil die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{O}_E^Y$ genau die Existenzgebiete Y -wertiger holomorpher Abbildungen sind, kann man (3.1) auch folgendermaßen formulieren:

(3.2) Lemma : Die Existenzgebiete Y -wertiger holomorpher Abbildungen sind genau dann pseudokonvex, wenn der in (3.1) angegebene Kontinuitätssatz gilt.

Wir untersuchen nun, für welche Räume Y der in (3.1) angegebene Kontinuitätssatz gilt.

(3.3) Satz : Ist Y ein folgenvollständiger lokalkonvexer Raum, so ist $q: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow E$ pseudokonvex.

Beweis: Folgt unmittelbar aus (0.22) und (3.2) . q.e.d.

Satz (3.3) läßt sich noch etwas allgemeiner fassen. Definiert man plurisubharmonische Funktionen auf lokalkonvexen Räumen in der gleichen Weise wie auf Banachräumen, so sind die Aussagen (ii) bis (v) in Satz (2.3) auch dann noch äquivalent, wenn der Basisraum E lokalkonvex, aber nicht notwendigerweise ein Banachraum ist. Man nennt deshalb eine Mannigfaltigkeit $Y \longrightarrow F$ über einem lokalkonvexen Raum F pseudokonvex, wenn für sie eine dieser Aussagen zutrifft.

(3.4) Satz : F sei ein folgenvollständiger lokalkonvexer Raum, und $Y \longrightarrow F$ sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über F . Dann ist $q: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow E$ pseudokonvex.

Beweis: In [51 , SCHOTTENLOHER] ist gezeigt, daß jede holomorphe Abbildung von H nach Y holomorph auf P fortgesetzt werden kann (Bezeichnungen wie in (3.1)). Derselbe Beweis zeigt jedoch, daß auch der in (3.1) angegebene Kontinuitätssatz gilt. q.e.d.

(3.5) Satz : Ist Y ein reduzierter Steinscher komplexer Raum, so ist $q: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow E$ pseudokonvex.

Beweis: Wir haben die Gültigkeit des in (3.1) angegebenen Kontinuitätssatzes zu zeigen. Wir verwenden die dortigen Bezeichnungen. W sei eine Nullumgebung in E_1 , und f sei eine holomorphe Abbildung von $D := H \oplus W$ nach Y . Für jedes $h \in \mathcal{O}(Y)$ besitzt h gemäß (0.22) eine holomorphe Fortset-

zung $\tilde{h}$ auf $P \oplus W$. Jedes $z \in P \oplus W$ definiert deshalb einen Algebramorphismus $\hat{z}: \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$, $h \longrightarrow \tilde{h}(z)$. Wir zeigen, daß $\hat{z}$ stetig ist bezüglich der kompakt-offenen Topologie auf $\mathcal{O}(Y)$. Sei $z = \lambda a + \mu b + w$. Wähle $t > 0$ mit $\max\{|\lambda|, |\mu|\} < t < 1$. $\Gamma := \{\zeta a + \mu b + w : |\zeta| = t\}$ ist kompakt und in $H \oplus W$ enthalten; $K := f(\Gamma)$ ist deshalb ebenfalls kompakt, und es gilt wegen des schwachen Maximumprinzips (2.6) für alle $h \in \mathcal{O}(Y)$

$$|\hat{z}(h)| = |\tilde{h}(z)| \leq \sup\{\tilde{h}(x) : x \in \Gamma\} \leq \sup\{h(x) : x \in K\}.$$

Nach dem allgemeinen Satz von IGUSA in [23, FORSTER, Satz 1] ist die Abbildung $\varphi: Y \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(Y)$, die jedem $y \in Y$ den Auswertungshomomorphismus $\hat{y}$ zuordnet, ein Homöomorphismus von Y auf die Menge $\text{Spec } \mathcal{O}(Y)$ der stetigen Algebramorphismen von $\mathcal{O}(Y)$ nach $\mathbb{C}$ versehen mit der schwachen Topologie. Durch $g(z) := \hat{z}$ für $z \in P \oplus W$ wird eine Fortsetzung von $\varphi \circ f$ gegeben, die stetig ist, da $h \circ \varphi^{-1} g = \tilde{h}$ für alle $h \in \mathcal{O}(Y)$ stetig ist. $\varphi^{-1} \circ g$ ist also eine stetige Fortsetzung von f . Weil jeder Punkt von Y eine Umgebung besitzt, die sich durch auf ganz Y definierte holomorphe Funktionen in einen $\mathbb{C}^n$ einbetten läßt, ergibt sich aus der Beziehung $h \circ \varphi^{-1} \circ g = \tilde{h}$ auch die Holomorphie von $\varphi^{-1} \circ g$. q.e.d.

Wir fassen die Ergebnisse kurz zusammen.

(3.5) Satz : Y sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über einem folgenvollständigen lokalkonvexen Raum oder ein reduzierter Steinscher komplexer Raum.

Dann ist der espace étalé $q: \mathcal{O}_E^Y \longrightarrow E$ pseudokonvex,
und folglich gelten die Kontinuitätssätze (2.12)
bis (2.17) und (2.21) auch für die stetigen Schnit-
te von q .

Kapitel 4 Kontinuitätssätze für meromorphe Funktionen

Wir gehen wie im Fall der holomorphen Abbildungen vor und zeigen, daß das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion pseudokonvex ist, indem wir einen (0.22) entsprechenden Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen beweisen. Daraus ergibt sich dann, daß alle im zweiten Kapitel formulierten Kontinuitätssätze auch für meromorphe Funktionen gelten.

Ein HARTOGSScher Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen läßt sich nicht so einfach beweisen wie im holomorphen Fall. Ein (0.23) ähnlicher Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen wurde erstmals 1911 von E.LEVI im $\mathbb{C}^2$ bewiesen, allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Grenzfläche nicht nur aus Singularitäten der Funktion besteht. 1932 lieferte H.KNESER einen anderen Beweis, der nicht nur für eine konvergente Folge von Kreisscheiben sondern von beliebigen beschränkten eindimensionalen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ funktioniert. Auch er mußte anfangs die erwähnte Zusatzvoraussetzung machen, konnte sich jedoch bald darauf davon befreien. LEVIS Beweismethode ist z.B. in [56 , SIU] dargestellt. Er verwendet Laurententwicklungen, während KNESER mit Cauchyschen Integralformeln arbeitet. Beide Beweise lassen sich auf Banachräume übertragen. Wir werden [34 , KNESER] folgen.

(4.1) Satz : W sei eine offene Teilmenge des Banachraumes E , 0 sei ein Randpunkt von W . r, r_1 und r_2 seien positive reelle Zahlen, $r_1 < r_2$. f sei eine meromorphe Funktion auf

$(W \times \Delta(0, r_2)) \cup (B_E(0, r) \times A(0; r_1, r_2)) \subset E \times \mathbb{C}$.
 $\{0\} \times A(0; r_1, r_2)$ bestehe nicht nur aus Singularitäten von f . Dann läßt sich f meromorph auf eine Umgebung von $\{0\} \times \Delta(0, r_2)$ fortsetzen.

Beweis: $(\{0\} \times A(0; r_1, r_2)) \cap S(f) =: \{0\} \times \mathcal{S}$ ist diskret.
 Daher gibt es eine Kreislinie $\Gamma = \{|\lambda| = r_3\}$ in $A(0; r_1, r_2)$, die $\mathcal{S}$ nicht trifft. Weil f auf der kompakten Menge $\{0\} \times \Gamma$ keine Singularitäten hat, kann man $\rho \in]0, r[$, $r_4 \in]0, r_3[$ und $r_5 \in]r_3, \infty[$ wählen, derart daß f auf $B_E(0, \rho) \times A(0; r_4, r_5)$ holomorph ist und beschränkt bleibt. Auf

$(B_E(0, \rho) \cap W) \times \Delta(0, r_5) =: Y$ ist f meromorph. $I(f) \cap Y$ ist eine analytische Teilmenge von Y , ist aber in $(B_E(0, \rho) \cap W) \times \Delta(0, r_3)$ enthalten. Bezeichnet $\pi: E \times \mathbb{C} \longrightarrow E$ die kanonische Projektion, so folgt aus (0.13), daß $\pi(I(f)) \cap (B_E(0, \rho) \cap W)$ eine einkodimensionale analytische Teilmenge von $B_E(0, \rho) \cap W$ ist. Es gibt also einen Punkt $w_0 \in B_E(0, \rho) \cap W$ und ein $\delta > 0$, so daß $B_E(w_0, \delta)$ in $B_E(0, \rho) \cap W$ enthalten ist und $B_E(w_0, \delta) \times \Delta(0, r_3)$ und $I(f)$ disjunkt sind.

Falls f auf $\{w_0\} \times \Delta(0, r_3)$ keine Pole hat, folgt die Behauptung des Satzes aus (0.21). Nehmen wir deshalb an, f habe dort mindestens einen Pol.

Wir wollen zeigen, daß sich $\frac{1}{f-c}$ meromorph fortsetzen läßt, wenn $c \in \mathbb{C}$ geeignet gewählt wird.

M sei die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\lambda \notin \overline{f(B_E(0, \rho) \times A(0; r_4, r_5))}$.
- 2) f nimmt in keiner Nullstelle von $D_2 f(w_0, \cdot)$ in $\Delta(0, r_3)$ den Wert λ an , d.h. $f(w_0, \cdot) - \lambda$ hat im $\Delta(0, r_3)$ nur einfache Nullstellen .
- 3) $\lambda \neq f(w_0, 0)$.
- 4) Es gibt mindestens ein $z \in \Delta(0, r_3)$ mit $\lambda = f(w_0, z)$.

Da $f(B(0, \rho) \times A(0; r_4, r_5))$ beschränkt ist und $\{w_0\} \times \Delta(0, r_3)$ mindestens einen Pol enthält, ist das Innere M° von M nicht leer. Sei $c \in M^\circ$. Wegen 2) hat $f(w_0, \cdot) - c$ in $\Delta(0, r_3)$ endlich viele einfache Nullstellen $u_j(w_0, c)$, $j = 1, \dots, m$.

Auf Grund des Satzes über implizite Funktionen kann man eine offene nicht leere Teilmenge $Q \subset M^\circ$ und Kreisscheiben K_j um die $u_j(w_0, c)$, $j = 1, \dots, m$, finden sowie δ so verkleinern, daß durch $f(w, z) - \lambda = 0$ in $B_E(w_0, \delta) \times K_j \times Q$ der Graph einer holomorphen Funktion $u_j: B_E(w_0, \delta) \times Q \longrightarrow K_j$ mit $D_2 u_j(w, \lambda) = - \frac{1}{D_2 f(w, u_j(w, \lambda))} =: v_j(w, \lambda) \neq 0$ für alle $(w, \lambda) \in B_E(w_0, \delta) \times Q$ definiert wird, $j = 1, \dots, m$.

$v_1(w), \dots, v_m(w)$ seien die Polstellen von $f(w, \cdot) - \lambda$ in $\Delta(0, r_3)$, mehrfache Pole seien so oft aufgeführt, wie ihre Vielfachheit angibt.

Für $w \in B_E(w_0, \delta)$, $\lambda \in Q$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzen wir

$$S_k(w, \lambda) := \sum_{j=1}^m u_j(w, \lambda)^k \quad \text{und} \quad T_k(w) := \sum_{j=1}^m v_j(w)^k .$$

Es gilt

$$S_k(w, \lambda) - T_k(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^k D_2 f(w, z)}{f(w, z) - \lambda} dz ,$$

wenn Γ geeignet orientiert ist,

$$\begin{aligned}
 \text{und } U_k(w) &:= \sum_{j=1}^m v_j(w, c) u_j(w, c)^k \\
 &= \frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial \lambda} (S_{k+1} - T_{k+1})|_{\lambda=c} \\
 &= \frac{1}{2\pi i(k+1)} \int_{\Gamma} \frac{z^{k+1} D_2 f(w, z)}{(f(w, z) - c)^2} dz .
 \end{aligned}$$

Durch algebraische Umformungen ergibt sich (siehe [33])

$$U(w) := \begin{vmatrix} U_0(w) & \dots & U_{m-1}(w) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{m-1}(w) & \dots & U_{2m-2}(w) \end{vmatrix} \neq 0$$

und

$$\begin{aligned}
 V(w, z) &:= \begin{vmatrix} U_0(w) & \dots & U_m(w) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{m-1}(w) & \dots & U_{2m-1}(w) \\ 1 & z & \dots & z^m \end{vmatrix} \\
 &= U(w) \prod_{j=1}^m (z - u_j(w)) \quad (*)
 \end{aligned}$$

für alle $w \in B_E(w_0, \delta)$ und $z \in \mathbb{C}$.

U_k , U und V sind sogar für $w \in B_E(0, \rho)$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert und holomorph. Wegen (*) hat $\frac{f-c}{V}$ auf $B_E(w_0, \delta) \times \overline{\Delta(0, r_3)}$ keine Nullstelle, also ist $\frac{V}{f-c}$ in einer Umgebung davon holomorph. Weil $f-c$ auf $B_E(0, \rho) \times \Delta(0; r_4, r_5)$ keine Null-

stelle hat, ist $\frac{V}{f-c}$ dort holomorph. Nach (0.21) kann daher $\frac{V}{f-c}$ durch eine holomorphe Funktion $g \neq 0$ auf $B_E(0, \rho) \times \Delta(0, r_3)$ fortgesetzt werden. Daraus folgt, daß $f-c$ durch die meromorphe Funktion $\frac{V}{g}$ dorthin fortgesetzt wird. Weil f auf $B_E(0, \rho) \times \Delta(0; r_1, r_2)$ schon definiert war, erhält man insgesamt, daß f meromorph auf $B_E(0, \rho) \times \Delta(0, r_2)$ fortgesetzt werden kann. q.e.d.

Um sich von der Bedingung zu befreien, daß die Grenzfläche nicht nur aus Singularitäten bestehen darf, hat KNE-SER das folgende Lemma bewiesen (seine Aussage ist etwas anders formuliert).

(4.2) Lemma : Ω sei ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, A sei eine analytische Teilmenge von Ω , $A \neq \Omega$. $k: \Omega \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ sei definiert durch $k(x) := \{ \xi \in \mathbb{P}_{n-1} : \text{die Zusammenhangskomponente von } x \text{ in } (x + \xi) \cap \Omega \text{ ist in } A \text{ enthalten} \}$. Dann ist der Graph G von k analytisch, und $k(A)$ ist mager.

Beweis: 1) Wir zeigen, daß G analytisch ist.

Sei $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{P}_{n-1}$. Wähle eine Umgebung V von x und eine holomorphe Abbildung $h: V \longrightarrow F$ in einen Banachraum F mit $h^{-1}(0) = V \cap A$. $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ sei eine Karte von $\mathbb{P}_{n-1}$ bei ξ , o.E. sei $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = (\frac{v_1}{v_0}, \dots, \frac{v_{n-1}}{v_0})$.

Es gibt ein $r > 0$, so daß $y + t(1, \alpha) \in V$ für alle $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y - x\| < r$, $\alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $\|\alpha - \varphi(\xi)\| < 1$ und $t \in \overline{\Delta(0, r)}$.

$\mathcal{O}_b(\Delta(0,r))$ bezeichne den Banachraum der beschränkten holomorphen Funktionen auf $\Delta(0,r)$ mit der Supremumsnorm.

Definiere

$$\phi: B(x,r) \times \phi^{-1}(B(\xi),1)) \longrightarrow \mathcal{O}_b(\Delta(0,r))$$

durch $[\phi(y,v)](t) := h(y + t(1, \phi(v)))$ für $t \in \Delta(0,r)$.

ϕ ist holomorph, und es gilt

$$G \cap (B(x,r) \times \phi^{-1}(B(\xi),1)) = \phi^{-1}(0).$$

2) Wir zeigen, daß $k(A)$ mager ist.

M_0 sei die Menge der regulären Punkte von G ; M_0 ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Menge S_1 der singulären Punkte von G ist eine echte analytische Teilmenge von G . Für $i \geq 1$ sei S_{i+1} die Menge der singulären Punkte von S_i ; es gilt immer $\dim S_{i+1} < \dim S_i$. M_i sei die Menge der regulären Punkte von S_i ; M_i ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. Weil die Dimensionen der S_i absteigen, bilden die M_i , $i=0, \dots, \dim G$, eine disjunkte Zerlegung von G .

$\hat{k}: G \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ sei die kanonische Projektion. $\hat{k}(A)$ ist mager, wenn $\hat{k}(M_i)$ für jedes i mager ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn $\hat{k}(C)$ nirgends dicht ist für jede kompakte Teilmenge C eines M_i ; denn jedes M_i ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.

Nehmen wir, es gäbe eine kompakte Menge C in einem M_j , derart daß $\hat{k}(C)$ nicht nirgends dicht ist. Weil $\hat{k}(C)$ abgeschlossen ist, muß es einen inneren Punkt enthalten.

Daraus folgt $1 := \dim M_j \geq n-1$, und man kann einen Punkt $z \in M_j$ sowie lokale Koordinaten $u_1, \dots, u_1$ von M_j bei z finden, so daß $D(\hat{k} \circ u^{-1})(u(z))$ invertierbar ist, wobei

$u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ ist.

Sei o.E. die 0-te Komponente von $\hat{k}$ in einer Umgebung U von z verschieden von 0. Wählt man im $\mathbb{P}_{n-1}$ die Karte $\phi(v_0: \dots: v_{n-1}) = (\frac{v_1}{v_0}, \dots, \frac{v_{n-1}}{v_0})$, so ist $\kappa := \phi \circ \hat{k} \circ u^{-1}$ eine holomorphe Abbildung von $u(U)$ nach $\mathbb{C}^{n-1}$. $D := u(U)$. $\check{k}: G \rightarrow \Omega$ sei die kanonische Projektion. Für $i=1,2$ seien die Abbildungen $f_i: D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ definiert durch $f_1(x, \lambda) := \check{k} \circ u^{-1}(x)$ und $f_2(x, \lambda) := \lambda(1, \kappa(x))$. G sei wie in 1) in einer Umgebung von z durch eine Abbildung Φ definiert; indem man U nötigenfalls verkleinert, kann man erreichen, daß U im Definitionsbereich von Φ enthalten ist. Dann ist $(f_1 + f_2)(D \times \Delta(0, r))$ eine Teilmenge von A (r wie in 1)).

$$Df_2(y, \lambda) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \lambda D\kappa(y) & * \\ & * \\ & * \\ & * \\ & * \\ & * \end{array} \right)$$

$Df_2(u(z), \lambda)$ ist invertierbar für alle $\lambda \neq 0$, weil $D\kappa(u(z))$ es ist. Die Inverse ist

$$Q(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} * & \lambda^{-1}(D\kappa(u(z)))^{-1} \\ * & \\ * & \\ * & \\ * & \\ * & \\ * & \\ \hline 1 & 0 \dots\dots\dots 0 \end{array} \right).$$

Für $|\lambda| \rightarrow \infty$ strebt ihre Supremumsnorm $\|Q(\lambda)\|$ gegen 0. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ dem Betrage nach genügend groß, so gilt also $\|Df_1(u(z), \lambda)\| < \|Q(\lambda)\|^{-1}$, d.h. $D(f_1 + f_2)(u(z), \lambda)$ ist

invertierbar und folglich ist $\det D(f_1 + f_2)(u(z), \lambda) \neq 0$.
 Weil $\det D(f_1 + f_2)(u(z), \lambda)$ holomorph ist, gibt es auch in
 $\Delta(0, r)$ einen Punkt λ mit $\det D(f_1 + f_2)(u(z), \lambda) \neq 0$.
 Daraus folgt, daß $(f_1 + f_2)(D \times \Delta(0, r))$ und somit auch A
 eine offene nicht leere Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ enthalten. Das
 ist ein Widerspruch zu $A \neq \Omega$. q.e.d.

(4.3) Lemma : A sei eine analytische Menge in einem Ge-
 biet eines Banachraumes E . Es sei $0 \in A$ und
 $\text{codim}_0 A \geq 1$. Dann ist die Menge der komplexen Gera-
 den, die A in 0 punkthaft schneiden, dicht in $\mathbb{P}(E)$.

Beweis: Wäre die Menge nicht dicht, so läge ein Kegel mit
 nicht leerem offenen Kern in A , was $\text{codim}_0 A \geq 1$ wider-
 spricht (vgl. [42, RAMIS, III.1.1.]). q.e.d.

Wir können jetzt den angekündigten Kontinuitätssatz bewei-
 sen.

(4.4) Satz : E sei ein Banachraum, $E = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b \oplus H$ sei eine
 direkte Zerlegung, $a \neq 0 \neq b$. Es seien $r, s \in]0, 1[$ und
 W ein Gebiet in H . Dann kann jede meromorphe Funk-
 tion m auf

$D := [(A(0; s, 1)a \oplus \Delta(0, 1)b) \cup (\Delta(0, 1)a \oplus \Delta(0, r)b) \oplus W$
 meromorph auf eine Umgebung von $\Delta(0, 1)a \oplus \Delta(0, 1)b$ in E
 fortgesetzt werden.

Beweis: Sei $z \in \Delta(0,1)b$. Wir zeigen, daß es eine meromorphe Funktion auf einer Umgebung von $\Delta(0,1)a + z$ in E gibt, die in einer Umgebung von $A(0;s,1)a + z$ mit m übereinstimmt.

1) O.E. sei $W = B_H(0, \epsilon)$. Nach (4.3) gibt es ein $c \in B_H(0, \frac{\epsilon}{2})$, so daß für $b' := b + c$ die Menge $D \cap (z + \Phi a + \Phi b')$ nicht nur aus Singularitäten von m besteht.

2) $S := \{\lambda \in \Phi : z + \lambda(b - z) \in \Delta(0,1)b\}$ und

$R := \{\lambda \in \Phi : z + \lambda(b - z) \in \Delta(0,r)b\}$ sind nicht leere Kreisscheiben, R liegt relativ kompakt in S . Für $\lambda \in S$ gilt

$z + \lambda(b' - z) = z + \lambda(b - z) + \lambda c \in \Delta(0,1)b + W$, weil $|\lambda| < 2$.

Folglich ist m meromorph auf einer Umgebung von

$[\Delta(0,1)a + z + Rb'] \cup [A(0;s,1)a + z + Sb']$.

3) K sei ein zusammenhängender kompakter Teil von S , der 0 und einen Punkt $u \in R$ enthält.

$$\delta := \frac{1}{3} \min\{d(K, Rd S), d(u, Rd R)\}$$

Wegen 1) und (4.2) kann man ein $\alpha \in \Phi$ mit $|\alpha| < \delta$ finden, so daß die Singularitätenmenge $S(m)$ in $A(0;s,1)a + z + Sb'$ kein Geradenstück in Richtung $a + \alpha b'$ enthält.

4) Es sei $T_\alpha : \Phi a + z + Sb' \longrightarrow \Phi a + z + Sb'$ definiert durch

$$\lambda a + z + \mu b' \longrightarrow \lambda a + z + (\mu + \lambda \alpha) b'.$$

T_α ist biholomorph. Für $\rho > 0$ sei

$$K_\rho := \{\lambda \in \Phi : d(\lambda, K) < \rho \|b'\|^{-1}\}.$$

Dann gilt

$$\Delta(0,1)a + z + K_\delta b' \subset T_\alpha(\Delta(0,1)a + z + K_{2\delta} b') \subset \Delta(0,1)a + z + Sb'.$$

5) Durch $T(\lambda a + z + \mu b' + h) := T_\alpha(\lambda a + z + \mu b') + h$ wird ein Automorphismus von $E = \Phi a + z + \Phi b' + H$ definiert.

$m \circ T$ ist in einer Umgebung (bez. E) von $A(0;s,1)a + z + K_{2\delta} b'$

definiert und meromorph. M sei die Menge aller $\lambda \in K_{2\delta}$, derart daß es eine Umgebung U von $z + \lambda b'$ (bez. $z + \phi b' + H$) und eine meromorphe Fortsetzung von $m T$ auf $U + \Delta(0,1)a$ gibt. M ist offen und nicht leer wegen $u \in M$. Wegen (4.1) ist M auch abgeschlossen, also $M = K_{2\delta}$.

Wegen 4) folgt daraus, daß m auf eine Umgebung (bez. E) von $\Delta(0,1)a + z + K_{\delta} b'$, also insbesondere auf eine Umgebung von $\Delta(0,1)a + z$ meromorph fortgesetzt werden kann. q.e.d.

Wie in (3.1) kann man aus (2.22) und (4.4) das folgende Resultat herleiten.

(4.5) Satz : Der espace étalé $q: \mathbb{M}_E \longrightarrow E$ der Garbe der meromorphen Funktionen auf E ist pseudokonvex, und folglich gelten die Kontinuitätssätze (2.12) bis (2.17) und (2.21) auch für die stetigen Schnitte von q .

Mit Hilfe von (2.13) läßt sich der zweite RIEMANNsche Hebbbarkeitssatz für meromorphe Funktionen genauso beweisen wie für holomorphe Funktionen (siehe (0.25)); jede meromorphe Funktion, die auf einer Banachmannigfaltigkeit Ω außerhalb einer analytischen Menge A definiert ist, läßt sich also meromorph auf ganz Ω fortsetzen, falls die Kodimension von A in jedem Punkt mindestens zwei ist.

Schließlich kann man noch aus den angegebenen Kontinuitätssätzen für meromorphe Funktionen auf Grund von (1.11) Kontinuitätssätze für a -holomorphe Korrespondenzen in den $\mathbb{P}^n$ gewinnen, deren Graph eine Modifikation des Definitionsreiches ist.

Kapitel 5 Das LEVIproblem für meromorphe Funktionen

Die bisher formulierten Kontinuitätssätze für holomorphe und meromorphe Funktionen haben wir allein aus der Tatsache hergeleitet, daß die Existenzgebiete dieser Funktionen pseudokonvex sind. Es ist daher denkbar, daß wir Information verschenkt haben und daß es Kontinuitätssätze gibt, die zwar für holomorphe oder meromorphe Funktionen richtig sind, jedoch nicht für stetige Schnitte in beliebigen pseudokonvexen Gebieten. Wie wir später sehen werden, ist dies tatsächlich der Fall; solange wir allerdings als Basisraum E nur Banachräume zulassen, die eine Schauderbasis besitzen, kann dies nicht vorkommen.

Unter dem LEVIproblem versteht man die Frage, ob ein pseudokonvexer Raum das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist. Schon längere Zeit ist bekannt, daß dies richtig ist für Gebiete über dem $\mathbb{C}^n$. Wie ein Beispiel von JOSEFSON in [30] zeigt, ist hingegen nicht jedes pseudokonvexe Gebiet über einem Banachraum das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion. Für einige Klassen lokalkonvexer Räume als Basisräume ist das LEVIproblem allerdings positiv gelöst, so z.B. für Banachräume mit Schauderbasis (siehe [24 , 19 , 52]. Mit Hilfe eines Satzes aus [52] werden wir zeigen, daß jedes pseudokonvexe Gebiet über einem Banachraum mit Schauderbasis auch Existenzgebiet einer meromorphen Funktion ist. Im Endlichdimensionalen ist dies schon bekannt (siehe [7] und [31]).

$p: \Omega \longrightarrow E$ sei ein Gebiet über dem Banachraum E . Eine zulässige Überdeckung von Ω ist eine offene Überdeckung $\mathfrak{w}$ von Ω mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Zu $U, V \in \mathfrak{w}$ gibt es $W \in \mathfrak{w}$ mit $U \cup V \subset W$.
- (ii) Zu $U \in \mathfrak{w}$ gibt es $s > 0$ und $V \in \mathfrak{w}$ mit $d_{\Omega}(U) > s$ und $U_s := U\{B(x, s) : x \in U\} \subset V$.

Für jede zulässige Überdeckung $\mathfrak{w}$ von Ω setzen wir

$$A_{\mathfrak{w}} := \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f\|_V < \infty \text{ für alle } V \in \mathfrak{w} \}.$$

Ω heißt $A_{\mathfrak{w}}$ -separabel, wenn $A_{\mathfrak{w}}$ in jeder Faser von p die Punkte trennt, und Ω heißt $A_{\mathfrak{w}}$ -konvex, wenn $d_{\Omega}(\tilde{A}_{\mathfrak{w}}(W)) > 0$ für jedes $W \in \mathfrak{w}$, wobei

$$\tilde{A}_{\mathfrak{w}}(W) := \{x \in \Omega : |f(x)| \leq \|f\|_W \text{ für jedes } f \in A_{\mathfrak{w}}\}.$$

(5.1) Satz : $p: \Omega \longrightarrow E$ sei ein pseudokonvexes Gebiet über dem Banachraum E . E besitze eine Schauderbasis.

Dann gibt es eine abzählbare zulässige Überdeckung $\mathfrak{w}$ von Ω , so daß Ω $A_{\mathfrak{w}}$ -separabel und $A_{\mathfrak{w}}$ -konvex ist.

Beweis: Der Satz ist ein Spezialfall von [51, SCHOTTEN-LOHER, Satz 4.4].

(5.2) Satz : Auf jedem pseudokonvexen Gebiet $p: \Omega \longrightarrow E$ über einem Banachraum E mit Schauderbasis gibt es eine holomorphe Funktion, die sich weder holomorph noch meromorph fortsetzen läßt.

Beweis: Wir konstruieren zunächst ähnlich wie in [29, HÖRMANDER, p.39] eine holomorphe Funktion auf Ω , die

"in jeder Umgebung jedes Randpunktes" Nullstellen beliebig hoher Ordnung hat.

Nach (5.1) gibt es eine abzählbare zulässige Überdeckung $\mathfrak{w} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, so daß Ω $A_{\mathfrak{w}}$ -separabel und $A_{\mathfrak{w}}$ -konvex ist. Man kann o.E. annehmen, daß $W_n \subset W_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $V_n := \tilde{A}_{\mathfrak{w}}(W_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weil E separabel ist, ist es auch Ω ; M sei eine abzählbare dichte Teilmenge in Ω . Wähle eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M , in der jeder Punkt von M unendlich oft vorkommt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n := B(x_n, d_{\Omega}(x_n))^*$. Weil $d_{\Omega}(V_n) > 0$, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in B_n$ mit $z_n \notin V_n$. Man kann nun eine Funktion $f_n \in A_{\mathfrak{w}}$ finden, derart daß $f_n(z_n) = 1$ und $\|f_n\|_{V_n} < 2^{-n}$. $f := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)^n$ ist eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf Ω , die nicht identisch verschwindet, deren Ableitungen bis zur n -ten Ordnung jedoch in z_n verschwinden.

Es ist möglich (z.B. unter Verwendung von [17, COEURÉ, Prop. 1.2], eine abzählbare Teilmenge Q in E zu finden, so daß $p^{-1}(Q)$ abzählbar und dicht in Ω ist und keine Nullstelle von f enthält. Wie in [50, SCHOTTENLOHER, p.235] folgt, daß es ein $g \in A_{\mathfrak{w}}$ gibt, derart daß $g(x) \neq g(y)$ für alle $x, y \in p^{-1}(Q)$ mit $p(x) = p(y)$.

Zu jedem Paar $(x, y) \in p^{-1}(Q) \times p^{-1}(Q)$ mit $p(x) = p(y)$ gibt es höchstens ein $\lambda \in \mathbb{C}$, für das die folgende Gleichung gilt: $f(x) + \lambda f(x)g(x) = f(y) + \lambda f(y)g(y)$. (*)

Da es nur abzählbar viele solcher Paare gibt, kann man ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so wählen, daß (*) für alle diese Paare verletzt ist; wir setzen $h := f + \lambda fg$.

*) $B(x, d_{\Omega}(x))$ sei die Zusammenhangskomp. von $p^{-1}(B(p(x), d_{\Omega}(x)))$, die x enthält.

Wir zeigen zunächst, daß h keine holomorphe Fortsetzung besitzt.

Seien φ ein Morphismus von $p: \Omega \longrightarrow E$ in das Gebiet $q: \Xi \longrightarrow E$ und $\tilde{h}$ eine holomorphe Funktion auf Ξ mit $h = \tilde{h} \circ \varphi$.

φ ist injektiv: Es gelte $\varphi(x) = \varphi(y)$ für zwei Punkte $x, y \in \Omega$. Weil φ ein Morphismus von Gebieten ist, kann man Umgebungen U_x von x und U_y von y finden mit $\varphi(U_x) = \varphi(U_y)$. Nach Konstruktion trennt h die Punkte in jeder Faser $p^{-1}(a)$ mit $a \in Q$; weil $p^{-1}(Q)$ dicht ist, folgt deshalb $x = y$.

φ ist surjektiv: Wir nehmen an, φ sei nicht surjektiv. $\varphi(\Omega)$ besitzt dann einen Randpunkt z in Ξ . Zu jeder Umgebung U von z kann man eine in U enthaltene Umgebung V von z und ein $r > 0$ finden, so daß $q|_V \longrightarrow B_E(q(z), r)$ topologisch ist. Sei $W := (q|_V)^{-1}(B_E(q(z), \frac{r}{2}))$. Weil M in Ω dicht ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(x_n) \in W$.

Wegen $d_\Omega(x_n) \leq \|q(\varphi(x_n)) - q(z)\| < \frac{r}{2}$ gilt $B_n \subset \varphi^{-1}(V)$. In jedem B_n liegen Nullstellen von h beliebig hoher Ordnung, also auch in $\varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(U)$. Da dies für jede Umgebung U richtig ist, muß der Keim von $\tilde{h}$ in z Null sein. Dies ist ein Widerspruch zu $h \neq 0$.

Um zu zeigen, daß sich h meromorph ebenfalls nicht fortsetzen läßt, nehmen wir an, φ sei ein Morphismus von $p: \Omega \longrightarrow E$ in das Gebiet $q: \Xi \longrightarrow E$ und m sei eine meromorphe Funktion auf Ξ mit $h = m \circ \varphi$.

Die Injektivität von φ folgt wie oben.

Wir zeigen die Surjektivität von φ . Nehmen wir an, φ sei nicht surjektiv. Dann ist der Rand von $\varphi(\Omega)$ in Ξ nicht leer.

Wie oben gezeigt wurde, kann m in keinem Randpunkt von $\varphi(\Omega)$ holomorph sein. Da außerdem jeder Randpunkt Häufungspunkt von Nullstellen ist, besteht $\text{Rd}\varphi(\Omega)$ nur aus Unbestimmtheitsstellen von m , ist also in der zweikodimensionalen analytischen Menge $I(m)$ enthalten. Deshalb läßt sich jeder Punkt in $\Xi - \overline{\varphi(\Omega)}$ mit $\varphi(\Omega)$ durch einen Weg verbinden, der $\text{Rd}\varphi(\Omega)$ nicht trifft; da dies nicht sein kann, muß $\Xi - \overline{\varphi(\Omega)}$ leer sein. m ist also in $\Xi - \text{Rd}\varphi(\Omega)$ holomorph. Auf Grund des zweiten RIEMANNschen Hebbarkeitssatzes (0.25) und des Identitätssatzes muß m auf ganz Ξ holomorph sein. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß h holomorph nicht fortgesetzt werden kann. q.e.d.

(5.3) Satz : Für ein Gebiet Ω über einem Banachraum mit Schauderbasis sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) Ω ist pseudokonvex.
- (ii) Ω ist das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion.
- (iii) Ω ist das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion.
- (iv) Ω ist Holomorphiehülle.
- (v) Ω ist Meromorphiehülle.

Beweis: (iv) $\Rightarrow$ (i) und (v) $\Rightarrow$ (i) folgen bei Darstellung der Hülle als Durchschnitt von Existenzgebieten aus (2.22) und der universellen Eigenschaft des Durchschnittes. Alle anderen Implikationen sind trivial oder bereits gezeigt. q.e.d.

Anhang Gebiete über $c_0(I)$ mit überabzählbarer Indexmenge I

Ist I eine Menge, so bezeichne $c_0(I)$ den Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen ξ auf I , für die die Menge $\{i \in I: |\xi(i)| > \delta\}$ für jedes $\delta > 0$ endlich ist. Die Supremumsnorm macht $c_0(I)$ zu einem Banachraum.

Von nun an sei I überabzählbar. $c_0(I)$ ist dann nicht separabel, besitzt also auch keine Schauderbasis. Die Überlegungen des vorigen Kapitels treffen deshalb auf $c_0(I)$ nicht zu. JOSEFSON hat in [30] gezeigt, daß das Leviproblem in $c_0(I)$ tatsächlich nicht positiv lösbar ist: Er hat ein pseudokonvexes Gebiet in $c_0(I)$ konstruiert, das nicht Holomorphiegebiet ist.

Aus [30] läßt sich ein Kontinuitätssatz herauspräparieren, der zwar in jedem Holomorphiegebiet, aber nicht in jedem pseudokonvexen Gebiet und auch nicht in jedem holomorphkonvexen Gebiet gilt, denn JOSEFSONs Gebiet ist auch holomorphkonvex (vgl. die Bemerkung weiter unten nach (A.5)). Er beruht vielmehr auf der Tatsache, daß holomorphe und meromorphe Funktionen auf $c_0(I)$ lokal nur von höchstens abzählbar vielen Koordinatenrichtungen abhängen. Die Existenzgebiete zeichnen sich deshalb unter den pseudokonvexen Gebieten durch eine gewisse Produktdarstellung aus. Daraus ergibt sich dann, daß die Begriffe pseudokonvexes Gebiet, Existenzgebiet und Holomorphiehülle alle voneinander verschieden sind.

Auf Grund der erwähnten Produktdarstellung von Existenzge-

bieten kann man mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Kapitels schließen, daß ein Gebiet über $c_0(I)$ genau dann das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist, wenn es das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion ist. Dies wiederum hat zur Folge, daß auch Holomorphiehülle und Meromorphiehülle übereinstimmen.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ kann man $c_0(J)$ auf kanonische Weise als Teilraum von $c_0(I)$ auffassen; $\pi_J: c_0(I) \rightarrow c_0(J)$ sei die kanonische Projektion $\xi \mapsto \xi|_J$. Die Abbildung $(\pi_J, \pi_{I-J}): c_0(I) \rightarrow c_0(J) \times c_0(I-J)$ ist ein normtreuer Isomorphismus, wenn auf $c_0(J) \times c_0(I-J)$ als Norm das Maximum der Normen auf $c_0(J)$ und $c_0(I-J)$ genommen wird.

$p: \Omega \rightarrow c_0(I)$ sei ein Gebiet; J sei eine Teilmenge von I . Wir sagen, eine holomorphe (meromorphe) Funktion f auf Ω hänge auf $U \subset \Omega$ höchstens von J ab, wenn es eine holomorphe (meromorphe) Funktion g auf $\pi_J \circ p(U)$ gibt, so daß $f|_U = g \circ \pi_J \circ p|_U$. Wir sagen, f hänge bei $x \in \Omega$ höchstens von J ab, wenn es eine Umgebung U von x gibt, auf der f höchstens von J abhängt.

$\mathcal{O}_J(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{M}_J(\Omega)$) sei die Menge der holomorphen (bzw. meromorphen) Funktionen auf Ω , die bei jedem Punkt von Ω höchstens von J abhängen.

(A.1) Lemma : J sei eine Teilmenge von I , und $U \subset c_0(J)$ und $V \subset c_0(I-J)$ seien Gebiete. Hängt eine auf $U \times V$ holomorphe oder meromorphe Funktion f bei einem Punkt x höchstens von J ab, so hängt sie auf $U \times V$ höchstens von J ab.

Beweis: Man kann o.E. annehmen, daß x keine Singularität von f ist. Dann $g(y) := f(\pi_J(y), \pi_{I-J}(y))$ für $y \in U$ auf Grund des Identitätssatzes die gesuchte Faktorisierung. q.e.d.

In [30, JOSEFSON] ist das folgende Resultat bewiesen.

(A.2) Satz : f sei auf einer Kugel B in $c_0(I)$ holomorph.

Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so daß f auf B höchstens von J abhängt.

(A.3) Korollar : f sei auf einer Kugel B in $c_0(I)$ meromorph.

Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so daß f auf B höchstens von J abhängt.

Auf Grund dieser Aussagen kann man ähnliche Methoden anwenden wie in [28, 2, 3] .

(A.4) Korollar : $p: \Omega \longrightarrow c_0(i)$ sei ein Gebiet. Dann gilt:

a) $\mathcal{O}(\Omega) = \bigcup \{ \mathcal{O}_J(\Omega) : J \subset I, J \text{ abzählbar} \}$

b) $\mathcal{M}(\Omega) = \bigcup \{ \mathcal{M}_J(\Omega) : J \subset I, J \text{ abzählbar} \}$.

Beweis: a) f sei holomorph auf Ω . Wegen (A.1) ist für jedes $J \subset I$ die Menge aller Punkte von Ω , bei denen f höchstens von J abhängt, nicht nur offen sondern auch abgeschlossen in Ω . Mit (A.2) folgt daraus die Behauptung.

b) m sei meromorph auf Ω . Weil $D(m) = \Omega - S(m)$ zusammenhängt, gibt es nach a) eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so daß $\tilde{m} \in \mathcal{M}_J(D(m))$ ist (siehe Kapitel 1). Seien $x \in \Omega$, W eine Umgebung von x , die durch p topologisch auf $U \times V \subset c_0(J) \times c_0(I-J)$ abgebildet wird, und f, g holomorphe Funktionen auf W mit

$\tilde{m}|W \cap D(m) = \frac{f}{g}|W \cap D(m)$. Sei $y \in W \cap D(m)$; dann sind

$f^*(z) := f \circ (p|W)^{-1}(\pi_J \circ p(z), \pi_{I-J} \circ p(y))$ und

$g^*(z) := g \circ (p|W)^{-1}(\pi_J \circ p(z), \pi_{I-J} \circ p(y))$ holomorphe Funktionen auf W , die höchstens von J abhängen, aber ebenfalls m definieren. q.e.d.

Aus (A.2) und (A.3) ergibt sich unmittelbar der folgende Kontinuitätssatz; ein Spezialfall davon ist in [18, DINEEN, Prop.3] zu finden.

(A.5) Satz : H und G seien Gebiete in $c_0(I)$, $H \subset G$. Zu jeder abzählbaren Teilmenge $J \subset I$ seien $\delta_J > 0$, $x_J \in H$, $\xi_J \in c_0(I-J)$ und eine x_J und $x_J + \xi_J$ enthaltende zusammenhängende Menge Z_J in $x_J + c_0(I-J)$ gegeben.
 $L_J := \bigcup_{\delta_J} (Z_J) \cup (\xi_J + G)$ und $L := H \cup \{L_J : J \subset I, J \text{ abzähl.}\}$.

Dann gibt es zu jeder meromorphen Funktion f auf L eine meromorphe Funktion g auf G mit $g|H = f|H$. Ist f holomorph, so auch g .

JOSEFSON hat in [30] ein pseudokonvexes Gebiet Ω in $c_0(I)$ konstruiert, das eine gewisse Menge L der obigen Gestalt, aber nicht die zugehörige Menge G enthält; es kann deshalb kein Holomorphiegebiet sein. Man kann zeigen, daß Ω nicht nur pseudokonvex, sondern sogar holomorphkonvex ist (siehe z.B. [53, SCHOTTENLOHER]). Wir skizzieren die wesentlichen Ideen.

O.E. sei $1 \in I$. Für $i \in I$ sei $e_i := (\delta_{ij})_{j \in I}$.

Ist $z = (z_i)_{i \in I} \in c_0(I)$, so sei x_i der Realteil und y_i der

Imaginärteil von z_i . Es sei $\epsilon \in]0, \frac{1}{6}[$.

$$U := \{z \in c_0(I) : \text{Für alle } i, j \in I, 1 \leq i \leq j \leq 1, \text{ gilt } |y_i| < \frac{\epsilon}{3} \\ \text{und } |x_i| + |y_j| < 1 + 2\epsilon\}$$

U ist offen und konvex. $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\psi(z) := x_1 - \sup_{i \neq 1} \varphi(x_i) - \sup_{j \neq 1} (y_j + \epsilon x_j)^2$$

wobei $\varphi(t) := (t-1)^2$ falls $t > 1$ und $\varphi(t) := 0$ sonst.

JOSEFSONs Gebiet Ω ist dann definiert als

$$\Omega := \{z \in U : \psi(z) < 0\}.$$

Aus dem Beweis von Lemma 3 in [30, JOSEFSON] ergibt sich, daß ein (A.5) entsprechender Kontinuitätssatz für stetige Schnitte von Ω nicht gilt:

$$\text{Sei } H := B(-e_1, \epsilon^3), \quad G := [-1, 0] e_1 + B(0, \epsilon^3).$$

Zu jeder abzählbaren Teilmenge $J \subset I$ wähle man ein $j \in I - J$ und setze $\delta_J := \epsilon^3$, $x_J := -e_1$, $\xi_J := (1 + \frac{3}{2}\epsilon) e_j$ und $Z_J := -e_1 + [0, 1](-e_1 - \xi_J)$.

Definiert man wie in (A.5)

$$L_J := U_{\delta_J}(Z_J) \cup (\xi_J + G)$$

und $L := H \cup \{L_J : J \subset I, J \text{ abzählbar}\}$,

so folgt aus den Abschätzungen in [30], daß L in Ω enthalten ist, G jedoch nicht. Dies bedeutet, daß sich jede auf Ω holomorphe oder meromorphe Funktion über den Randpunkt O hinaus holomorph bzw. meromorph fortsetzen läßt.

Um Ω als pseudokonvex nachzuweisen, hat JOSEFSON im Beweis von Lemma 2 in [30] gezeigt, daß jeder Randpunkt von Ω in U eine Umgebung besitzt, in der ψ psh. ist; der gleiche Be-

weis liefert jedoch sogar die Plurisubharmonizität von ψ in allen Punkten von U .

Ω_1 und Ω_2 seien nicht leere, offene Teilmengen eines Banachraumes E . Es gelte $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Ω_1 heißt Rungesch bezüglich Ω_2 , wenn die Beschränkung von $\mathcal{O}(\Omega_2)$ auf Ω_1 bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen dicht im Raum $\mathcal{O}(\Omega_1)$ liegt.

Wir erinnern an eine Variante des RUNGESchen Approximationsatzes im Endlichdimensionalen:

$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ seien pseudokonvexe offene Mengen. Ω_1 ist genau dann Rungesch bezüglich Ω_2 , wenn $\tilde{\rho}_{\Omega_2}(K) \subset \Omega_1$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω_1 .

(Siehe dazu z.B. [29, HÖRMANDEK, 4.3.3., 4.3.4.]).

Ein Gebiet Ω_1 in einem Banachraum E heißt endlich Rungesch, wenn $\Omega_1 \cap F$ Rungesch bezüglich F ist für jeden endlichdimensionalen Teilraum F von E .

Behauptung: Ω ist endlich Rungesch.

Beweis: Sei F ein endlichdimensionaler Teilraum von $c_0(I)$. Weil U konvex ist, ist $U \cap F$ Rungesch bezüglich F . Es genügt also zu zeigen, daß $\Omega \cap F$ Rungesch bezüglich $U \cap F$ ist. Sei $K \subset \Omega \cap F$ kompakt. Wegen $\|\psi\|_K < 0$ gilt

$$\tilde{\rho}_{U \cap F}(K) = \{z \in U : \psi(z) \leq \|\psi\|_K\} \subset \Omega.$$

Aus dem Rungeschen Approximationssatz folgt die Behauptung.

Behauptung: Ω ist holomorphkonvex.

Beweis: Jedes pseudokonvexe, endlich Rungesche Gebiet in einem Banachraum mit der Approximationseigenschaft ist holomorphkonvex (siehe z.B. [53, SCHOTTENLOHER, Cor.1]).

Wir geben nun eine einfache Beschreibung der Existenzgebiete holomorpher und meromorpher Funktionen über $c_0(I)$ an.

(A.6) Satz : $p: \Omega \longrightarrow c_0(I)$ sei ein Gebiet. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) Ω ist das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion f .

(ii) Ω ist das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion f .

(iii) Ω ist pseudokonvex, und es gibt eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ und ein Gebiet $q: \Omega_J \longrightarrow c_0(J)$, so daß $p: \Omega \longrightarrow c_0(I)$ isomorph zu

$$q \times \text{id}_{c_0(I-J)} : \Omega_J \times c_0(I-J) \longrightarrow c_0(I) \text{ ist.}$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) :

1) Nach (3.3) bzw. (4.5) ist Ω pseudokonvex.

2) Nach (A.4) gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so daß $f \in \mathcal{O}_J(\Omega)$ bzw. $f \in \mathcal{M}_J(\Omega)$.

3) Behauptung: Jeder Punkt von Ω besitzt eine Umgebung, die durch p topologisch auf ein Gebiet der Gestalt $D \times c_0(I-J)$ abgebildet wird, wobei $D \subset c_0(J)$.

Beweis: Zu $y \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U , so daß $p|U \longrightarrow p(U)$ topologisch ist und sich $g := f \circ (p|U)^{-1}$ holomorph bzw. meromorph über $\pi_J|p(U) \longrightarrow \pi_J p(U)$ faktorisieren läßt. Es gibt deshalb eine holomorphe bzw. meromorphe Fortsetzung von g auf $W := \pi_J p(U) \times c_0(I-J)$. Wegen der universellen Eigenschaft eines Existenzgebietes muß es einen Gebietsmorphismus von W nach Ω geben, der W auf eine Umgebung V von y abbildet; dies bedeutet, daß $p|V \longrightarrow W$ topologisch ist.

4) Ω_J sei die Menge der Zusammenhangskomponenten der Fasern von $\pi_J \circ p$; $\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega_J$ sei die kanonische Abbildung. Ω_J trage die Finaltopologie bezüglich φ . $\pi_J \circ p$ faktorisiert durch φ zu einem Gebiet $q: \Omega_J \longrightarrow c_0(J)$. $(\varphi, \pi_{I-J} p)$ ist dann ein Isomorphismus von p und $q \times \text{id}_{c_0(I-J)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) :

Mit Ω ist auch Ω_J pseudokonvex. Weil J abzählbar ist, hat $c_0(J)$ eine Schauderbasis, und aus (5.2) folgt, daß Ω_J das Existenzgebiet einer holomorphen bzw. meromorphen Funktion f ist. Ω ist deshalb das Existenzgebiet von $f \circ \varphi$, wenn φ die von dem Isomorphismus zwischen p und $q \times \text{id}_{c_0(I-J)}$ induzierte Abbildung von Ω auf Ω_J ist. q.e.d.

(A.7) Korollar : Die Holomorphiehülle und die Meromorphiehülle eines Gebietes über $c_0(I)$ stimmen überein.

Beweis: Folgt aus (A.6), weil beide Hüllen verallgemeinerter Durchschnitt der das Gebiet umfassenden Existenzgebiete sind. q.e.d.

Auf die übliche Weise zeigt man, daß jedes konvexe Gebiet in $c_0(I)$ mit seiner Holomorphiehülle übereinstimmt. Wegen (A.6) ist jedoch nicht jedes konvexe Gebiet auch Existenzgebiet, eine beschränkte Kugel ist es z.B. nicht. Die Klasse der Existenzgebiete ist also echt enthalten in der Klasse der Hüllen, die wiederum, wie JOSEFSONs Beispiel zeigt, echt in der Klasse der pseudokonvexen Gebiete über $c_0(I)$ enthalten ist.

Literaturverzeichnis

- [1] ALEXANDER, H.J.
Analytic functions on Banach spaces.
Thesis, Berkeley 1968.
- [2] AURICH, V.
The spectrum as envelope of holomorphy of a domain
over an arbitrary product of complex lines.
In: Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy,
Springer Lecture Notes 364, 1974.
- [3] AURICH, V.
Fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^\Lambda$.
Erscheint in: Infinite Dimensional Holomorphy and
Applications, North Holland.
- [4] BEHNKE, H.
Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität.
Math. Ann. 113 (1936), 392-397.
- [5] BEHNKE, H., SOMMER, F.
Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes.
Math. Ann. 121 (1950), 356-378.
- [6] BEHNKE, H., STEIN, K.
Der Severische Satz über anal. Fortsetzung von
Funktionen mehrerer Veränd. und der Kontinuitätssatz.
Ann. Mat. pura ed appl. 26 (1954), 297-313.
- [6a] BEHNKE, H., STEIN, K.
Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen.
Can. J. Math. 2 (1950), 152-165.
- [7] BEHNKE, H., THULLEN, P.
Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränder-
lichen. Erg. der Math. 51 (1970). Erste Auflage 1932.
- [8] BOCHNAK, J.
Analytic functions on Banach spaces.
Studia Math. 35 (1970), 273-292.

- [9] BOCHNAK, J., SICIĄK, J.
Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces.
Studia math. 39 (1971), 77-112.
- [10] BOURBAKI, N.
Topologie générale.
Hermann, Paris 1965.
- [11] BOURBAKI, N.
Variétés différentielles et analytiques.
Hermann, Paris 1971.
- [12] BREMERMAN, H.
Complex convexity.
Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 17-51.
- [13] BREMERMAN, H.
Holomorphic functionals and complex convexity in Banach spaces.
Pac. J. Math. 7 (1957), 811-831.
- [14] BREMERMAN, H.
Pseudoconvex domains in linear topological spaces.
In: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer 1965.
- [15] BROWN, A.B.
On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms.
Duke Math. J. 2 (1936), 20-28.
- [16] BUNGART, L.
Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas.
Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 317-344.
- [17] COEURÉ, G.
Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces.
North Holland. 1974.
- [18] DINEEN, S.
A growth property of pseudoconvex domains in locally convex topological vector spaces. Preprint.

- [19] DINEEN, S., NOVERRAZ, Ph., SCHOTTENLOHER, M.
Le probleme de Levi dans certains espaces vectoriels topologiques localement convexes.
Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 87-97.
- [20] DOUADY, A.
A remark on Banach analytic spaces.
In Symposium on Infinite Dimensional Topology.
Ann. Math. Stud. 69, Princeton Univ. Press 1972.
- [21] FIELD, M.J.
A finiteness result on the ring of analytic functions on a Banach space.
Studia Math. 46 (1973), 17-20.
- [22] FISCHER, G.
Complex analytic geometry.
Springer Lecture Notes 538, 1976.
- [23] FORSTER, O.
Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln.
Math. Z. 97 (1967), 376-405.
- [24] GRUMAN, L., KISELMAN, C.
Le probleme de Levi dans les espaces de Banach a base.
C.R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 1296-1299.
- [25] HARTOGS, F.
Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen.
Sitzungsber. der Münchener Akad. 36 (1906).
- [26] HARTOGS, F.
Über die Bedingungen, unter welchen eine analytische Funktion mehrerer Veränderlichen sich wie eine rationale verhält.
Math. Ann. 70 (1911), 207-222.
- [27] HERVÉ, M.
Analytic and plurisubharmonic functions in finite and infinite dimensional spaces.
Springer Lecture Notes 198, 1971.

- [28] HIRSCHOWITZ, A.
Remarques sur les ouverts d'holomorphie d'un produit dénombrable de droites.
Ann. Inst. Four. 19 (1969), 219-229.
- [29] HÖRMANDER, L.
An introduction to complex analysis in several variables.
van Nostrand 1966.
- [30] JOSEFSON, B.
A counterexample in the Levi problem.
In: Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy.
Springer Lecture Notes 364, 1974.
- [31] KAJIWARA, J., SAKAI, E.
Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions.
Nagoya Math. J. 29 (1967), 75-84.
- [32] KISTLER
Über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen.
Dissertation, Göttingen 1905.
- [33] KNESER, H.
Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen.
Jahresberichte der DMV 41 (1932), 164-168.
- [34] KNESER, H.
Ein Satz über die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen.
Math. Ann. 106 (1932), 648-665.
- [35] LELONG, P.
Les fonctions plurisousharmoniques.
Ann. E.N.S. 62 (1945), 301-338.
- [36] LEVI, E.E.
Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni anal. di due o piu var. compl..
Ann. Mat. pur. appl. 17 (1910).

- [37] MAZET, P.
Un théoreme d'image directe propre.
Sém. Lelong 1972/73. Springer Lecture Notes 410.
- [38] NACHBIN, L.
Topology on spaces of holomorphic mappings.
Erg. der Math. 47 (1969).
- [39] NOVERRAZ, Ph.
Pseudoconvexité, convexité polynomiale et domaines
d'holomorphic en dimension infinie.
North Holland 1973.
- [40] OSGOOD, W.F.
Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II.
Reprint Chelsea Publ. Comp. 1965.
- [41] OSGOOD, W.F.
Topics in the theory of functions of several com-
plex variables.
Madison Coll. 1913, Part II, publ. by the AMS 1914.
Reprint Dover Publ. 1966.
- [42] RAMIS, J.P.
Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique
complexe.
Erg. der Math. 53 (1970).
- [43] RAMIS, J.P., RUGET, G.
Un théoreme sur les images directes analytiques ba-
nachiques.
C.R. Acad. Sc. Paris 267 (1968), 995-996.
- [44] REMMERT, R.
Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer
Räume.
Math. Ann. 133 (1957), 328-370.
- [45] REMMERT, R., STEIN, K.
Über die wesentlichen Singularitäten analytischer
Mengen.
Math. Ann. 126 (1953), 263-306.

- [46] ROTHSTEIN, W.
Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen.
Archiv d. Math. 1 (1948), 119-126.
- [47] RUGET, G.
A propos des cycles analytiques de dimension infinie.
Inv. math. 8 (1969), 267-312.
- [48] SAINT-LOUP, B.
Un théoreme d'image directe en géométrie analytique complexe.
C.R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 555-556.
- [49] SCHOTTENLOHER, M.
Riemann domains: Basic results and open problems.
In: Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy.
Springer Lecture Notes 364, 1974.
- [50] SCHOTTENLOHER, M.
Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces.
Port. Math. 33 (1974), 219-250.
- [51] SCHOTTENLOHER, M.
Das Levisproblem in unendlichdimensionalen Räumen mit Schauderzerlegung.
Habilitationsschrift, München 1974.
- [52] SCHOTTENLOHER, M.
The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a Schauder decomposition.
Erscheint in: Ann. Inst. Four.
- [53] SCHOTTENLOHER, M.
Polynomial approximation on compact sets.
Erscheint in: Infinite Dimensional Holomorphy and Application. North Holland.
- [54] SEVERI, F.
Una proprietà fondamentale dei campi di oloedomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa.
Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI, 15 (1932), 487-490.

- [55] SEVERI, F.
A proposito d'un teorema di Hartogs.
Comm. math. helv. 15 (1943), 330-352.
- [56] SIU, Y.T.
Techniques of extensions of analytic objects.
Lecture Notes in Pure and Applied Math. 8,
Marcel Dekker 1974.
- [57] SOEDER, H.
Beiträge zur Funktionentheorie in Banachschen
Räumen.
Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster,
Heft 9 (1956).
- [58] STEIN, K.
Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Ver-
änderlichen.
Vorlesungsausarbeitung, München 1962.
- [59] STEIN, K.
Topics on holomorphic correspondences.
Rocky Mountain J. Math. 2 (1972), 443-463.
- [60] WHITNEY, H.
Complex analytic varieties.
Addison-Wesley 1972.
- [61] HURWITZ, A.
Verhandlungen des ersten internationalen Mathema-
tiker-Kongresses, 1897.

Lebenslauf

Am 17.1.1949 wurde ich in Schwäbisch Hall geboren.

Von 1955 bis 1959 besuchte ich dort die Volksschule und anschließend das Gymnasium bei St. Michael bis zur Reifeprüfung im Juni 1967.

Im Wintersemester 1967/68 begann ich an der Universität München mein Mathematikstudium. 1969 legte ich die Diplomvorprüfung ab. Im Wintersemester 1971/72 und Sommersemester 1972 studierte ich in Paris. Anschließend kehrte ich an die Universität München zurück und legte im Oktober 1973 die Diplomprüfung ab.

Ich hörte Vorlesungen bei J.Batt, J.Dixmier, M.Hervé, G.Hämmerlin, K.Jörgens, H.Kerner, K.Königsberger, V.Mammitzsch, H.Richter, Y.T.Siu, K.Stein, J.Weidmann, E.Wienholtz, K.Wolffhardt.

Seit dem Wintersemester 1973 bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München.

München, im Januar 1977

